

Doi: 10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2024.03.009

具有未知增长率的一类上三角非线性多智能体系统的协同控制

孙泽泽, 李武全

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264039)

摘要: 基于有向领导者-追随者型的网络拓扑结构, 研究了一类具有未知增长率的上三角非线性多智能体系统的协同控制问题。首先, 通过引入坐标变换, 将原系统转换为带有时间增益的等效系统; 其次, 针对标称系统进行控制器设计, 获得原系统的分布式时变状态反馈控制器。所设计的控制器能够保证追随者与领导者的输出跟踪误差有界, 且闭环系统所有信号有界。最后, 利用仿真实例验证了控制方案的有效性。

关键词: 未知增长率; 上三角非线性多智能体系统; 协同控制; 时变状态反馈

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-8020(2024)03-0253-08

多智能体系统的分布式协同控制广泛应用于现代工业自动化系统, 尤其是大型机器人系统^[1]和生物系统^[2]等领域, 主要用来处理复杂的多变量控制问题, 得到了控制界的较高关注, 并取得了许多研究成果^[3-7]。文献[3]实现了一类线性多智能体系统的分布式输出调节和瞬态同步的协同控制; 文献[4]利用内模原理, 解决了一类具有加性扰动的不确定线性多智能体系统的鲁棒协同输出调节问题; 文献[5]通过引入自适应分布式观测器, 估计领导者的状态和系统矩阵, 解决了多智能体系统的协同控制问题; 文献[6]提出基于相邻智能体相对状态的分布式自适应非线性协议, 可以实现追随者的状态收敛于领导者的状态。当系统在控制方向未知且各智能体参数变化较大时, 文献[7]基于 Nussbaum 增益技术提出分布式自适应控制律, 能够实现非线性多智能体系统的自适应协同输出目标。然而, 上述研究方法都不适用于解决上三角非线性多智能体系统的协同控制问题。

实际应用中, 平面垂直起降飞机^[11]和车摆系统^[12]等均利用上三角结构方程来描述, 因此研究具有上三角结构的非线性系统具有重要的理论和实际意义^[8-12]。借助于齐次占优法和有限时间镇定技术, 文献[13]解决一类在不可测区域内具有高阶扰动的上三角非线性系统的全局输出反馈稳定问题; 文献[14-15]分别通过状态反馈和输出反馈研究了一类上三角随机非线性系统镇定问题。在有向网络拓扑结构下, 文献[16]研究了一类具有随机上三角非线性多智能体系统的分布式控制器设计问题。需要指出的是, 文献[13-16]仅考虑系统的非线性项具有已知增长率, 目前针对具有未知增长率的非线性系统的研究成果相对较少。

本文主要研究一类具有未知增长率的上三角非线性多智能体系统的协同控制问题, 与已有研究成果相比, 主要创新点包括两个方面: 1) 本文考虑的非线性项具有未知的增长率, 系统更具一般性和实用性; 2) 通过设计分布式时变状态反馈控制器, 保证追随者与领导者的输出跟踪误差有界, 且闭环系统所有信号有界。

1 预备知识

设 $G = (V, \mathcal{E}, A)$ 表示 n 阶有向加权图, 节点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 弧集 $\mathcal{E} \subset V \times V$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是具有

收稿日期: 2024-04-08; 修回日期: 2024-05-20

基金项目: 国家自然科学基金(62373179)

通信作者简介: 李武全(1981—), 男, 教授, 硕士研究生导师, 博士, 研究方向为随机非线性系统的控制与稳定性。E-mail: sea81@

126.com

非负元素的加权邻接矩阵。 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 表示节点 j 直接向节点 i 发送信息, j 称为 i 的父节点, i 称为 j 的子节点; 节点 i 的邻域集合记为 $N_i = \{j \in V: (j, i) \in \mathcal{E}, i \neq j\}$ 。如果节点 j 与节点 i 相邻, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$; 假设加权图 G 不存在自循环, 即 $a_{ii} = 0$ 。如果节点 i 既没有父节点也没有子节点, 则称该节点 i 为孤立节点; 如果节点 i 没有父节点只有子节点, 则称该节点为源。用 $V_s = \{j \in V | N_j = \emptyset\}$ 表示 V 中所有源和孤立节点的集合, 本文假设 $V - V_s \neq \emptyset$ 。从节点 i_1 到节点 i_k 的序列 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ 称为有向路径。有向加权图 G 的拉普拉斯矩阵 L 定义为 $L = D - A$, 这里 $D = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ 为度量矩阵, $\kappa_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ 。

本文考虑由 N 个追随者和 1 个领导者(节点标记为 0) 组成的多智能体系统, 用有向加权图 $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{\mathcal{E}})$ 表示, 其中 $\bar{V} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\bar{\mathcal{E}} \in \bar{V} \times \bar{V}$ 。如果 $(0, i) \in \bar{\mathcal{E}}$, 那么 $0 \in N_i$ 。令矩阵 $H = B + L$, 这里 $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$ 是与 \bar{G} 相关联的前导邻接矩阵, 若节点 0 与节点 i 相邻, 则 $b_i > 0$, 否则 $b_i = 0$ 。

2 问题描述

本文考虑如下一类多智能体系统, 其中第 i 个智能体的模型描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ij} = x_{i,j+1} + f_{ij}(\tilde{x}_{i,j+2}), & j = 1, 2, \dots, n_i - 2, \\ \dot{x}_{i,n_i-1} = x_{i,n_i}, \\ \dot{x}_{i,n_i} = u_i, \\ y_i = x_{i1}, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_{ij} \in \mathbf{R}$, $u_i \in \mathbf{R}$, $y_i \in \mathbf{R}$ 分别是第 i 个系统的状态、控制输入和系统输出, $\tilde{x}_{ij} = [x_{ij}, x_{i,j+1}, \dots, x_{i,n_i}]^T$; $f_{ij}(\tilde{x}_{i,j+2})$ 是仅依赖于状态变量 $x_{i,j+2}, x_{i,j+3}, \dots, x_{i,n_i}$ 的非线性函数, 与 $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j+1}$ 无关。

本文的控制目标是通过设计分布式时变状态反馈控制器 u_i , 实现多智能系统(1)的协同控制。

假设 1 对于 $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, 存在未知常数 $\theta > 0$, 使得

$$|f_{ij}(\tilde{x}_{i,j+2})| \leq \theta (|x_{i,j+2}| + |x_{i,j+3}| + \dots + |x_{i,n_i}|).$$

假设 2 \bar{G} 是以领导者为根的有向图。

假设 3 领导者的输出 $y_0(t) \in \mathbf{R}$ 和 $\dot{y}_0(t) \in \mathbf{R}$ 有界, 即存在常数 $M > 0$, $|y_0| \leq M, |\dot{y}_0| \leq M$ 。

为完成分布式协同控制的设计, 需要证明矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{d_1}a_{11} & -\frac{1}{d_1}a_{12} & \cdots & -\frac{1}{d_1}a_{1N} \\ -\frac{1}{d_2}a_{21} & 1 - \frac{1}{d_2}a_{22} & \cdots & -\frac{1}{d_2}a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{d_N}a_{N1} & -\frac{1}{d_N}a_{N2} & \cdots & 1 - \frac{1}{d_N}a_{NN} \end{bmatrix}$$

的可逆性, 其中 $d_i = b_i + \sum_{s=1}^N a_{is} > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ 。

引理 1 如果假设 2 成立, 那么矩阵 Z 是可逆的。

证明 将矩阵 Z 变形为

$$Z = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_N}\right) (B + D - A) = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_N}\right) H.$$

由假设 2, 领导者是全局可达的, 根据文献[19]中引理 4, 矩阵 H 是正稳定的, 即 H 的所有特征值具有正实部, 因此 H 可逆。结合 $d_i > 0$, 引理 1 得证。

注 1 系统 (1) 是一类具有未知增长率的上三角非线性多智能体系统, 这体现在两个方面: (i) 系统 (1) 中的非线性项仅依赖于后面的状态变量; (ii) 假设 1 中的 θ 是完全未知的, 即系统 (1) 存在未知的增长率, 因此文献 [16] 的控制方法不再适用。

3 协同控制器设计和闭环系统稳定性分析

本节将针对系统 (1) 设计时变状态反馈控制器, 以实现多智能体系统的协同控制。首先, 引入坐标变换, 将系统 (1) 转换为带有时间增益的等效系统; 其次, 应用 Backstepping 方法设计分布式时变状态反馈控制器, 完成对系统 (1) 的分布式协同控制设计。

3.1 坐标变换

针对系统 (1), 引入坐标变换: $\eta_{ij} = (t+b)^{j-1}x_{ij}, v_i = (t+b)^{n_i}u_i, b$ 是已知常数。将变换代入系统 (1), 则得到具有时间增益的上三角非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{t+b}\eta_{i,j+1} + \frac{j-1}{t+b}\eta_{ij} + \tilde{f}_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i,j+2}), & j = 1, 2, \dots, n_i - 2, \\ \dot{\eta}_{i,n_i-1} = \frac{1}{t+b}\eta_{i,n_i} + \frac{n_i-2}{t+b}\eta_{i,n_i-1}, \\ \dot{\eta}_{i,n_i} = \frac{1}{t+b}v_i + \frac{n_i-1}{t+b}\eta_{i,n_i}, \\ y_i = \eta_{i1}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\tilde{f}_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i,j+2}) = (t+b)^{j-1}f_{ij}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{i,j+2}), \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij} = [\eta_{ij}, \eta_{i,j+1}, \dots, \eta_{i,n_i}]^T, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n_i - 2$ 。根据假设 1, 可得

$$|\tilde{f}_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i,j+2})| \leq \theta(t+b)^{j-1} \sum_{p=j+2}^{n_i} |x_{ip}| \leq \frac{\theta}{(t+b)^2} \sum_{p=j+2}^{n_i} |\eta_{ip}|。$$

3.2 标称系统的状态反馈控制

本节应用 Backstepping 方法, 对如下标称系统进行状态反馈控制器设计:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ij} = \eta_{i,j+1} + (j-1)\eta_{ij}, & j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \\ \dot{\eta}_{i,n_i} = v_i + (n_i-1)\eta_{i,n_i}, \\ y_i = \eta_{i1}. \end{cases} \quad (3)$$

第 1 步: 定义李雅普诺夫函数 $V_{i1} = \frac{1}{2}\zeta_{i1}^2, \zeta_{i1} = \sum_{s=1}^N a_{is}(y_i - y_s) + b_i(y_i - y_0)$, 则

$$\dot{V}_{i1} = \zeta_{i1}(d_i\eta_{i2} - \sum_{s=1}^N a_{is}\eta_{s2} - b_i\dot{y}_0)。 \quad (4)$$

利用假设 3 和 Young 不等式可得, $|-b_i\zeta_{i1}\dot{y}_0| \leq \frac{1}{4}b_i^2M^2\beta_{i1}^{-1}\zeta_{i1}^2 + \beta_{i1}$, 这里 β_{i1} 是任意正常数。代入式 (4)

中, 可得

$$\dot{V}_{i1} \leq \zeta_{i1}\left(d_i\eta_{i2} - \sum_{s=1}^N a_{is}\eta_{s2} + \frac{1}{4}b_i^2M^2\beta_{i1}^{-1}\zeta_{i1}\right) + \beta_{i1}。 \quad (5)$$

构造第一个虚拟控制器

$$\eta_{i2}^* = -\alpha_{i1}\zeta_{i1} + \frac{1}{d_i}\sum_{s=1}^N a_{is}\eta_{s2}, \alpha_{i1} = \frac{1}{d_i}\left(c_{i11} + \frac{1}{4}b_i^2M^2\beta_{i1}^{-1}\right),$$

其中 $c_{i11} > 0$ 。代入不等式 (5), 可得

$$\dot{V}_{i1} \leq -c_{i11}\zeta_{i1}^2 + d_i\zeta_{i1}(\eta_{i2} - \eta_{i2}^*) + \beta_{i1}。 \quad (6)$$

第 k 步: 假设在前面的第 $k-1$ 步存在李雅普诺夫函数 $V_{i, k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2} \zeta_{ij}^2$, 满足

$$\dot{V}_{i, k-1} \leq - \sum_{j=1}^{k-1} c_{i, k-1, j} \zeta_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{ij} + \zeta_{i, k-1} (\eta_{ik} - \eta_{ik}^*),$$

其中, $\zeta_{ij} = \eta_{ij} - \eta_{ij}^*$, $\eta_{ij}^* = -\alpha_{i, j-1} \zeta_{i, j-1} + \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{sj}$.

接下来证明结论仍适用于第 k 步。取 $V_{ik} = V_{i, k-1} + \frac{1}{2} \zeta_{ik}^2$, $\zeta_{ik} = \eta_{ik} - \eta_{ik}^*$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ik} \leq & - \sum_{j=1}^{k-1} c_{i, k-1, j} \zeta_{ij}^2 + \zeta_{i, k-1} \zeta_{ik} + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{ij} + \\ & \zeta_{ik} \left[\eta_{i, k+1} - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{s, k+1} + (k-1) \eta_{ik} - (k-1) \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{sk} - \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial \eta_{sj}} \eta_{s, j+1} - \frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} y_0 \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

根据上述设计可得, 对 $k=1, 2, \dots, j$, $\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} = \alpha_{i, k-1} \alpha_{i, k-2} \dots \alpha_{i1} b_i$, 这表明 $\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0}$ 是常数。又有 $\frac{\partial \eta_{i, k+1}^*}{\partial y_0} = \alpha_{ik}$

$\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0}$ 因此 $\frac{\partial \eta_{i, k+1}^*}{\partial y_0}$ 也是常数。由假设 3 和 Young 不等式, 可知

$$\begin{aligned} |\zeta_{i, k-1} \zeta_{ik}| & \leq l_{ikk} \zeta_{i, k-1}^2 + \rho_{ik1} \zeta_{ik}^2, \\ \left| -\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} y_0 \zeta_{ik} \right| & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} \right)^2 M^2 \beta_{ik}^{-1} \zeta_{ik}^2 + \beta_{ik}, \\ \left| \zeta_{ik} \left[(k-1) \left(\eta_{ik} - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{sk} \right) - \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial \eta_{sj}} \eta_{s, j+1} \right] \right| & \leq \sum_{j=1}^{k-1} l_{ikj} \zeta_{ij}^2 + \rho_{ik2} \zeta_{ik}^2, \end{aligned}$$

代入式 (7), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ik} \leq & - (c_{i, k-1, 1} - l_{ik1}) \zeta_{i1}^2 - (c_{i, k-1, 2} - l_{ik2}) \zeta_{i2}^2 - \dots - (c_{i, k-1, k-1} - l_{i, k, k-1} - l_{ikk}) \zeta_{i, k-1}^2 + \\ & \zeta_{ik} \left\{ \eta_{i, k+1} - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{s, k+1} + \left[\rho_{ik1} + \rho_{ik2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} \right)^2 M^2 \beta_{ik}^{-1} \right] \zeta_{ik} \right\} + \sum_{j=1}^k \beta_{ij}, \end{aligned}$$

其中 l_{ikj} , ρ_{ik1} , ρ_{ik2} 是正常数, β_{ij} 是任意正常数, $j=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, k$ 。

构造第 k 个虚拟控制器为

$$\eta_{i, k+1}^* = -\alpha_{ik} \zeta_{ik} + \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \eta_{s, k+1},$$

其中 $\alpha_{ik} = c_{ikk} + \rho_{ik1} + \rho_{ik2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta_{ik}^*}{\partial y_0} \right)^2 M^2$, 则有

$$\dot{V}_{ik} \leq - \sum_{j=1}^k c_{ikj} \zeta_{ij}^2 + \zeta_{ik} (\eta_{i, k+1} - \eta_{i, k+1}^*) + \sum_{j=1}^k \beta_{ij}, \quad (8)$$

其中, $c_{ikj} = \begin{cases} c_{i, k-1, j} - l_{i, k, j} > 0, & j=1, 2, \dots, k-2, \\ c_{i, k-1, j} - l_{i, k, j} - l_{i, k, j+1} > 0, & j=k-1, \\ c_{ikk} > 0, & j=k. \end{cases}$

第 n_i 步: 定义 $V_{i, n_i} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{2} \zeta_{ij}^2$, 类似于不等式 (8) 的推导过程, 可得

$$\dot{V}_{i, n_i} \leq - \sum_{j=1}^{n_i-1} c_{i, n_i, j} \zeta_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} + \zeta_{i, n_i} \left\{ v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} v_s + \left[\rho_{i, n_i, 1} + \rho_{i, n_i, 2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta_{i, n_i}^*}{\partial y_0} \right)^2 M^2 \beta_{i, n_i}^{-1} \right] \zeta_{i, n_i} \right\}. \quad (9)$$

根据不等式 (9) 和引理 1, 下面给出系统 (3) 的分布式协同控制律。

定理 1 对于标称系统 (3), 如果假设 2、3 成立, 设计分布式协同控制器:

$$v_i = -\alpha_{i n_i} \zeta_{i n_i} + \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} v_s \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

这里 $\alpha_{i n_i} = c_{i n_i} + \rho_{i n_i, 1} + \rho_{i n_i, 2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta_{i n_i}^*}{\partial y_0} \right)^2 M^2$ 使得对李雅普诺夫函数 $V = \sum_{i=1}^N V_{i n_i}$, 满足

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} c_{i n_i j} \zeta_{ij}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \quad (11)$$

证明 根据引理 1 和控制器(10), 可得

$$\begin{aligned} [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T &= - [\alpha_{1 n_1} \zeta_{1 n_1} \ \alpha_{2 n_2} \zeta_{2 n_2} \ \dots \ \alpha_{N n_N} \zeta_{N n_N}]^T + \text{diag} \left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_N} \right) A [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T = \\ &= -Z^{-1} [\alpha_{1 n_1} \zeta_{1 n_1} \ \alpha_{2 n_2} \zeta_{2 n_2} \ \dots \ \alpha_{N n_N} \zeta_{N n_N}]^T, \end{aligned}$$

代入式(9), 可得到不等式(11)。进一步由引理 1 可知 矩阵 Z 是可逆的, 因此 v_i 是存在的。

3.3 稳定性分析

针对系统(1), 利用引理 1 和定理 1 设计分布式时变状态反馈控制器, 实现协同控制目标。

定理 2 针对系统(1), 基于假设 1 ~ 3 和有向网络拓扑结构 \bar{G} , 采用分布式时变状态反馈控制器

$u_i = \frac{v_i}{(t+b)^{n_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n_i$, 保证系统(1) 能够实现协同控制, 即: (i) 对于任意初始值 $x(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i - y_0|$ 有界; (ii) 闭环系统的所有信号都有界。

证明 针对系统(2), 可知

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i n_i j}}{t+b} \zeta_{ij}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial V}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij}, \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \left| \frac{\partial V}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} \right| &\leq \frac{\theta}{(t+b)^2} \sum_{i=1}^N \left[d_i \zeta_{i1} - \sum_{s=1}^N a_{is} \zeta_{s1} + \sum_{j=2}^{n_i} \left(\alpha_{i j-1} \dots \alpha_{i1} \left| d_i \zeta_{ij} - \sum_{s=1}^N a_{is} \zeta_{sj} \right| + \right. \right. \\ &\left. \left| \zeta_{ij} - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \zeta_{sj} \right| + \sum_{k=j+1}^{n_i} \alpha_{i k-1} \dots \alpha_{ij} \left| \zeta_{ik} - \frac{1}{d_i} \sum_{s=1}^N a_{is} \zeta_{sk} \right| \right) \right] \cdot \sum_{k=j+2}^{n_i} \frac{d_i}{b_i} \left| \zeta_{ik} - \alpha_{k-1} \zeta_{i k-1} \right| \leq \frac{\beta_2}{(t+b)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_{ij}^2, \end{aligned}$$

代入式(12), 可得

$$\dot{V} \leq - \frac{\beta_1}{t+b} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_{ij}^2 + \frac{\beta_2}{(t+b)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_{ij}^2 + \beta_0 = - \frac{\beta_1}{t+b} V + \left(- \frac{\beta_1}{t+b} + \frac{2\beta_2}{(t+b)^2} \right) V + \beta_0, \quad (13)$$

其中, $\beta_1 = \min\{c_{i n_i j}\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, n_i$, $\beta_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij}$ 是任意正常数 β_2 是依赖未知数 θ 的常数。

由式(13) 知, 存在足够大的常数 $T^* > 0$ 使得

$$\dot{V} \leq - \frac{\beta_1}{t+b} V + \beta_0, \quad \forall t > T^*, \quad (14)$$

此外, 根据 $\int_0^\infty \frac{\beta_1}{t+b} dt = \infty$ 则有 $\dot{V} \leq 0$ 。结合 V 的定义, 可得到 ζ_{ij} 是有界的。进一步由 ζ_{i1} 的定义可以得到

$$\begin{aligned} \zeta_1 = [\zeta_{11} \ \dots \ \zeta_{N1}]^T &= \left[\sum_{s=1}^N a_{1s} (y_1 - y_s) + b_1 (y_1 - y_0), \dots, \sum_{s=1}^N a_{Ns} (y_N - y_s) + b_N (y_N - y_0) \right]^T = \\ &= (L + B) (y - \mathbf{1}_N y_0), \end{aligned}$$

通过假设 2 和式(14), 对任意 $t > T^*$, 则

$$|y_i - y_0| \leq \|y - \mathbf{1}_N y_0\| \leq \|(L + B)^{-1}\| \|\zeta_1\| \leq \varepsilon, \quad (15)$$

其中 ε 是任意正常数。因此 输出跟踪误差是有界的。

进一步,由式(3)、(15)和假设3可知, m_{ij} 是有界的,而坐标变换是等价的,因此式(1)的所有信号都是有界的。

注2 由式(13)得到多智能体系统的几乎必然收敛性,而不是渐近稳定性。这是因为式(13)中的 β_2 依赖于未知参数 θ ,该式右侧在某个初始时间间隔可能为正值,这表明跟踪误差的渐近稳定性不能由式(13)推导得到。

4 仿真例子

考虑三连杆圆柱形机械臂^[17],其结构如图1所示,其中第 i 个系统可描述为

$$M_i \ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + D_i(q_i) \dot{q}_i = \tau_i, i = 1, 2, 3,$$

其中, $q_i = [q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$ 是关节变量向量, $\tau_i \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $M_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是正定的惯性矩阵, $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 是关于离心力和哥氏力的结合项, $D_i(q_i)$ 表示摩擦项。

网络通信拓扑 \bar{G} 如图2所示,由3个追随者和1个领导者组成,其中领导者的输出为 $y_0 = \frac{1}{1+t}$ 。根据文献[20],系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2} + f_i(x_{i3}), \\ \dot{x}_{i2} = x_{i3}, \\ \dot{x}_{i3} = u_i, \\ y_i = x_{i1}, i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (16)$$

其中, $f_1 = x_{13} \sin x_{13}, f_2 = a_1 x_{23}, f_3 = a_2 \sin x_{33}$, a_1, a_2 是未知常数。显然,模型(16)是上三角系统。定义输出跟踪误差 $e_i = y_i - y_0 (i = 1, 2, 3)$,由定理2,设计如下时变状态反馈控制器:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{17x_{13}}{(t+b)} - \frac{170x_{12}}{(t+b)^2} - \frac{680x_{11}}{(t+b)^3} + \frac{680y_0}{(t+b)^3}, \\ u_2 &= -\frac{17x_{23}}{(t+b)} - \frac{170x_{22}}{(t+b)^2} - \frac{850x_{21}}{(t+b)^3} + \frac{170x_{11}}{(t+b)^3} + \frac{680y_0}{(t+b)^3}, \\ u_3 &= -\frac{15x_{33}}{(t+b)} - \frac{150x_{32}}{(t+b)^2} - \frac{600x_{31}}{(t+b)^3} + \frac{600y_0}{(t+b)^3}. \end{aligned}$$

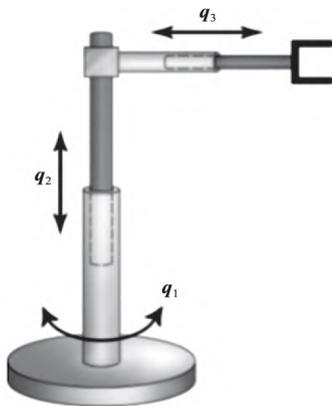


图1 三连杆圆柱形机械臂的结构图

Fig.1 Structure diagram of three-link cylindrical manipulator

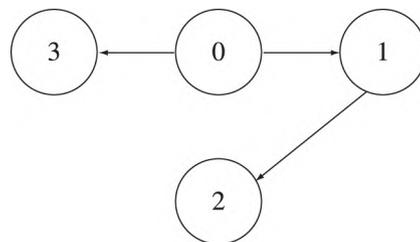


图2 通信拓扑 \bar{G}

Fig.2 The communication topology \bar{G}

针对模型(16),选取 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{5}, b = 6$,并设置初始条件 $x_{11} = -2, x_{21} = 5, x_{31} = -1, x_{12} = -2, x_{i3} = 1, i = 1, 2, 3$,仿真结果见图3、4。由图3可见,闭环系统的输出跟踪误差 e_i 和控制输入 u_i 均有界;图4表明

闭环系统的所有状态 x_{ij} 均有界。仿真结果说明本文所设计的控制方法是有效的。

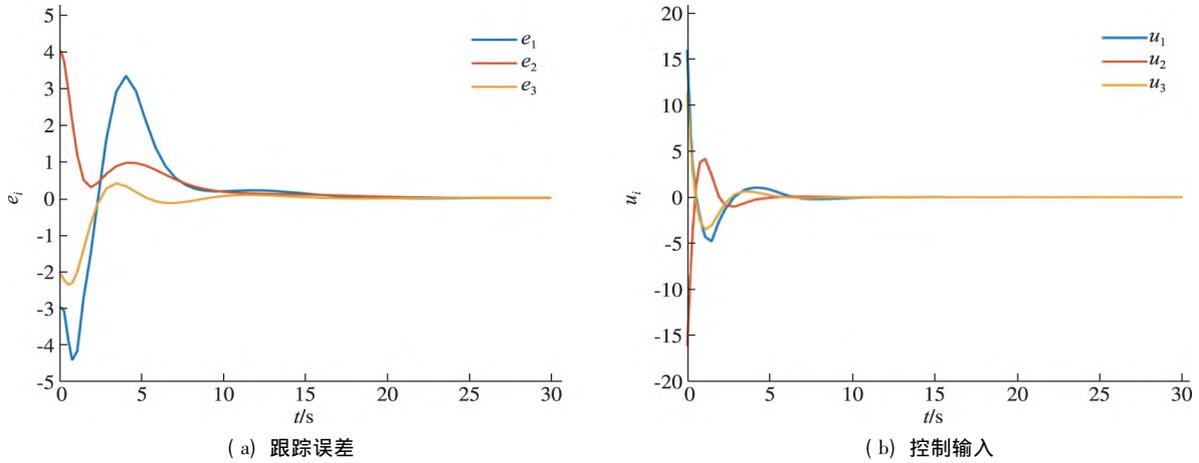


图 3 跟踪误差和控制输入的响应曲线

Fig.3 The response curves of tracking errors and control inputs

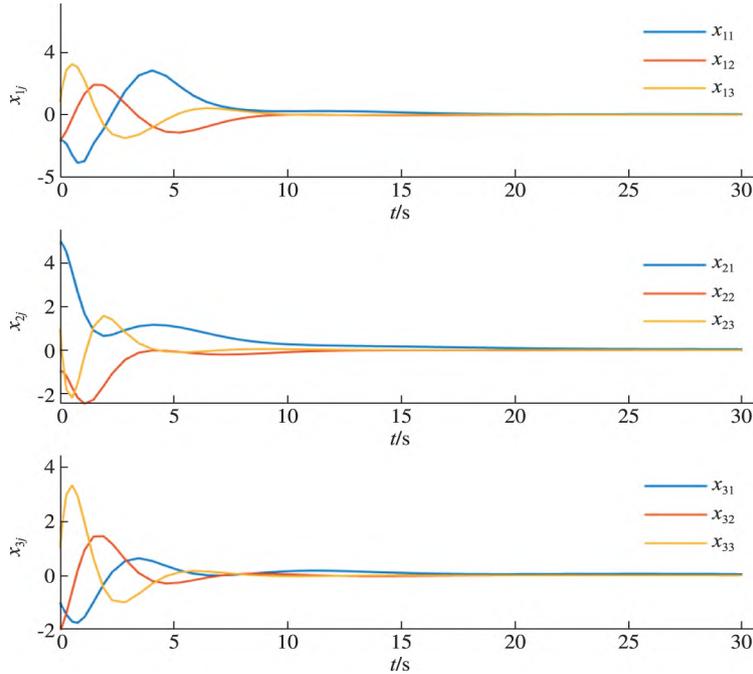


图 4 闭环系统的状态响应曲线

Fig.4 The response curves of the closed-loop system states

5 结论

本文研究了一类增长率未知的上三角非线性系统在有向网络拓扑结构下的协同控制问题。为了补偿系统的不确定性,设计了基于分布式的时变状态反馈控制器,实现了追随者与领导者的输出跟踪误差有界,同时保证闭环系统所有信号有界。最后,利用仿真实例说明了所提控制方案的有效性。

参考文献:

[1] BELTA C ,KUMAR V.Trajectory design for formations of robots by kinetic energy shaping [C]//The 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation 2002.

[2] OLFATI-SABER R.Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms theory [J].IEEE Transactions on Automatic Control 2006 51(3) : 401-420.

- [3] SEYBOTH G S ,REN W ,ALLGOWER F.Cooperative control of linear multi-agent systems via distributed output regulation transient synchronization [J].Automatica 2016 ,68: 132–139.
- [4] YANG R ,ZHANG H ,FENG G ,et al.Robust cooperative output regulation of multi-agent systems via adaptive event-triggered control [J].Automatica 2019 ,102: 129–136.
- [5] CAI H ,LEWIS L F ,HU G Q ,et al.The adaptive distributed observer approach to the cooperative output regulation of linear multi-agent systems [J].Automatica 2017 ,75: 299–305.
- [6] WANG Q ,FU J J ,WANG J Z.Cooperative tracking for high-order non-linear multi-agent systems via adaptive control [J].IET Electric Power Applications 2018 ,12(11) : 1592–1600.
- [7] LIU L.Adaptive cooperative output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems [J].IEEE Transactions on Automatic Control 2015 ,60(6) : 1677–1682.
- [8] TEEL A R.Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems [C]//The 2nd IFAC symposium on nonlinear control systems ,1992.
- [9] DU H B ,QIAN C J ,LI S H.Global stabilization of a class of uncertain upper-triangular systems under sampled-data control input control [J].International Journal of Robust and Nonlinear Control 2013 ,23(6) : 620–637.
- [10] JIAO T C ,ZHENG W X ,XU S Y.Time-varying state-feedback stabilisation of stochastic feedforward nonlinear systems with unknown growth rate [J].International Journal of Control 2016 ,90(9) : 1879–1892.
- [11] TEEL A R.A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation [J].IEEE Transactions on Automatic Control ,1996 ,41(9) : 1256–1270.
- [12] MAZENC F ,BOWONG S.Tracking trajectories of the cart-pendulum system [J].Automatica 2003 ,39(4) : 677–684.
- [13] DING S H ,QIAN C J ,LI S H ,et al.Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations [J].International Journal of Robust and Nonlinear Control 2011 ,21(3) : 271–294.
- [14] 李武全 ,井元伟 ,张嗣瀛.一类上三角随机非线性系统的状态反馈镇定 [J].控制与决策 2010 ,25(10) : 1543–1546.
- [15] 李武全 ,吴昭景.一类上三角随机非线性系统的输出反馈控制 [J].控制与决策 2012 ,27(10) : 1494–1498.
- [16] LI W Q.Distributed cooperative control for a class of stochastic upper-triangular nonlinear multi-agent systems [J].Neurocomputing 2016 ,216: 363–370.
- [17] HUANG J S ,WEN C Y ,WANG W ,et al.Adaptive finite-time consensus control of a group of uncertain nonlinear mechanical systems [J].Automatica 2015 ,51: 292–301.
- [18] LI W Q ,ZHANG J F.Distributed practical output tracking of high-order stochastic multi-agent systems with inherent nonlinear drift diffusion terms [J].Automatica 2014 ,50(12) : 3231–3238.
- [19] HU J P ,HONG Y J.Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays [J].Physica A 2007 ,374(2) : 853–863.
- [20] ZHAI J Y ,WAN Q.Cooperative output synchronisation of networked feedforward nonlinear systems via linear sampled-data control [J].International Journal of Systems Science 2017 ,48(5) : 961–970.

Cooperative Control for a Class of Upper-triangular Nonlinear Multi-agent Systems with Unknown Growth Rates

SUN Zeze , LI Wuquan

(School of Mathematics and Statistics Science ,Ludong University ,Yantai 264039 ,China)

Abstract: This paper concerns the cooperative control for a class of upper-triangular nonlinear multi-agent systems with unknown growth rates under the directed leader-followers type network topology. Firstly ,the original system was transformed into an equivalent one with a time gain by introducing a coordinate transformation. Secondly ,a distributed time-varying state feedback controller for the nominal system was designed. It is proved that the followers can achieve bounded output tracking of the leader ,and all signals of the closed-loop system are bounded by the designed controller. Finally ,the effectiveness of the control scheme was verified through a simulation example.

Keywords: unknown growth rates; upper-triangular nonlinear multi-agent systems; cooperative control; time-varying state-feedback

(责任编辑 顾建忠)