

投资机会约束下投资组合的模型预测控制

赵瑜慧,刘晓华

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:在投资机会约束的前提下,本文提出基于跟踪策略的投资风险最小化的投资组合优化问题。构建投资组合的状态空间模型,设计多步模型预测控制器,将投资机会约束转化为多步概率集约束,设计了基于模型预测控制的投资组合策略。最后,针对风险损失容忍度不同的投资者,通过分析数据验证了投资策略的有效性。

关键词:投资组合优化;投资机会约束;跟踪策略;模型预测控制;多步概率集

中图分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-8020(2025)02-0122-07

投资组合优化问题是投资者选择不同的资产投资,在给定风险下使获取的收益最大化,或者在给定的收益下使风险最小化。文献[1]提出了投资组合理论,建立了投资组合优化问题的经典均值-方差模型。由于静态分析在现实应用中局限性大,文献[2]考虑连续时间的动态投资组合优化问题,使用效用函数刻画不同投资者的收益-风险偏好特征。但效用函数的可操作性较弱,文献[3]构建了连续动态均值-方差模型。均值-方差模型依赖于过去数据的参数估计,文献[4—5]通过在财富跟踪策略下建立了风险目标函数,发现跟踪策略下的财富增长轨迹更加稳定。

由于投资过程存在很多实际限制,投资者须考虑金融市场中具有现实特征的投资约束。在实际进行投资决策时,投资者为权衡投资组合的收益,往往先根据个人的具体情况设置投资组合收益的下限,但鉴于未来市场的不确定性,所做决策需保证在不利情况发生时收益不能低于该下限。因此,文献[6]提出投资机会约束,即在不利情况发生时,投资决策使收益约束不小于规定的置信水平,通过概率约束控制投资风险。文献[7—9]在收益率符合正态分布的假设下,利用资产收益率的方差度量风险,构建了在投资机会约束下的投资组合模型,解决了投资风险最小化的投资优化问题。文献[10]进一步研究了长期投资中收益、风险和投资期限三者的关系,构建了投资机会约束下的动态投资组合模型。

考虑到金融市场的波动性,文献[11]指出投资组合优化不是单阶段投资过程,而是一个长期的多阶段投资过程;文献[12]进一步发现多期投资便于利用投资市场的信息变化及时调整投资组合。文献[13]提出模型预测控制(model predictive control, MPC)方法,采用滚动优化的方式在有限时域内对系统施加控制作用,使系统满足目标函数。由于 MPC 能够有效处理系统约束,文献[14—15]引入多步概率集,将机会约束转化为多步概率集的确定性约束,提出了解决带有机会约束的不确定系统优化问题的 MPC 策略。文献[16]考虑了带有投资机会约束的单周期投资组合优化问题,建立具有联合椭圆不确定集的鲁棒投资组合选择模型,得到约束条件的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)形式,进而将投资组合优化问题转化为易处理的凸规划问题。总之,投资者可以利用 MPC 方法进行多期投资,根据市场信息变化对资产组合进行动态调整,以解决投资组合优化问题^[17—19]。

本文提出了带有投资机会约束的投资组合 MPC 策略。根据文献[14—16]的转化思想,利用多步状态反馈控制器将投资机会约束转化为多步概率集约束,通过滚动优化的方法,得到投资组合约束和投资风险目标函数的 LMI 形式,从而将多周期的投资组合优化问题转化为 LMI 约束下的有限时域 MPC 问题。

收稿日期:2025-02-26;修回日期:2025-03-26

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2020MF063)

通信作者简介:刘晓华(1959—),男,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为预测控制。E-mail:xhliu@ldu.edu.cn

1 投资组合模型

考虑投资组合中前 n 个资产为风险资产,第 $n+1$ 个资产为无风险资产,假设投资过程由多个投资阶段组成,在每个阶段投资者可以获取有关资产价格的新信息,并通过出售或购买一些资产以应对市场变化。

将 k 时刻第 i 个风险资产的价格记为 $S_i(k)$,则第 i 个风险资产在 k 时刻的收益率为

$$\beta_i(k) = \frac{S_i(k) - S_i(k-1)}{S_i(k-1)}, i = 1, 2, \dots, n。$$

设 $u_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为 k 时刻第 i 个风险资产的交易金额。 $u_i(k) > 0, u_i(k) < 0$ 分别表示 k 时刻购买和出售第 i 个风险资产; $u_i(k) = 0$ 表示不交易。根据文献[5]的投资组合模型,第 i 个风险资产在 $k+1$ 时刻的资产价值为

$$x_i(k+1) = (1 + \beta_i(k))(x_i(k) + u_i(k)), \quad (1)$$

其中, $x_i(k)$ 表示 k 时刻第 i 个风险资产的资产价值。而无风险资产在 $k+1$ 时刻的资产价值为

$$x_{n+1}(k+1) = (1 + b)(x_{n+1}(k) + u_{n+1}(k)), \quad (2)$$

其中, b 为无风险资产的收益率, $u_{n+1}(k) \geq 0$ 为无风险资产的交易金额。因此, k 时刻投资组合财富为

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k)。 \quad (3)$$

令 $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{n+1}(k)]^T \in \mathbf{R}^{n+1}$ 为投资组合系统的状态向量, $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_{n+1}(k)]^T \in \mathbf{R}^{n+1}$ 为控制向量,投资组合财富 $y(k)$ 为输出变量,则由式(1)(3)得到投资组合模型为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{cases} \quad (4)$$

其中,系统矩阵 $\mathbf{A}(k) = \text{diag}(1 + \beta_1(k), 1 + \beta_2(k), \dots, 1 + \beta_n(k), 1 + b)$, 输入矩阵 $\mathbf{B}(k) = \mathbf{A}(k)$, 输出向量 $\mathbf{C} = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbf{R}^{1 \times (n+1)}$ 。

未来投资市场的不确定性会对终期财富产生不利影响,当不利情况发生时,由于不能满足事先制定的投资约束条件,因此对投资组合模型(4)增加投资机会约束条件的限制,使得期望财富不小于参考财富的概率不小于规定的置信水平,即 $\Pr(y(k+i) \geq \bar{y}(k+i)) \geq p, i = 1, 2, \dots, N$ 。其中: $\bar{y}(k)$ 为 k 时刻的参考财富,且 $\bar{y}(k+1) = (1 + d)\bar{y}(k), \bar{y}(0) = y(0)$, d 为参考收益率; $p \in (0, 1]$ 为规定的置信水平, p 越大表示投资者对风险的容忍度越小。令 $\hat{p} = 1 - p$, 投资机会约束等价于

$$\Pr(y(k+i) < \bar{y}(k+i)) \leq \hat{p}, i = 1, 2, \dots, N。 \quad (5)$$

当无风险资产的价值小于零时,投资者对无风险资产投资不会获得收益,反而亏损,因此无风险资产的价值不小于零,即 $x_{n+1}(k+1) \geq 0$, 则 $x_{n+1}(k) + u_{n+1}(k) \geq 0$ 。假设允许卖空,卖空金额受 $a_i \geq 0$ 限制,所以 $x_i(k) + u_i(k) \geq -a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。令 $\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n, 0)^T$, 则

$$\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) - \mathbf{a} \geq 0。 \quad (6)$$

如果禁止卖空,则 $a_i = 0$, 即 $x_i(k) + u_i(k) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。由于交易金额过高或过低会影响市场秩序,本文假设第 i 个资产的最小、最大交易金额分别为 $-u_i, u_i$, 则

$$-u_i \leq u_i(k) \leq u_i。 \quad (7)$$

2 基于 MPC 的投资策略

2.1 投资约束的转化

投资组合策略是通过期望财富跟踪参考财富轨迹以实现投资风险最小化,本节利用系统变量误差构建投资组合的增广系统,并通过财富误差轨迹描述期望财富与参考财富之间的跟踪效果。

由式(4)得到

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\Delta \mathbf{u}(k), \\ \Delta y(k) = \mathbf{C}\Delta \mathbf{x}(k), \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)$, $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$, $\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$ 。

设 $e(k)$ 表示期望财富与参考财富之间的误差, 即 $e(k) = y(k) - \bar{y}(k)$, 则 $k+1$ 时刻误差方程为

$$e(k+1) = e(k) + \mathbf{CA}(k)(\Delta \mathbf{x}(k) - \Delta \bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{CB}(k)\Delta \mathbf{u}(k), \quad (9)$$

其中, $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k)$ 为期望状态误差, 满足 $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\Delta \bar{\mathbf{x}}(k)$ 。令 $d(k) = d(1+d)^k \bar{y}(0)$, 则 $d(k-1) = \mathbf{C}\Delta \bar{\mathbf{x}}(k)$ 。由式(8)、(9), 则投资组合的增广系统为

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}_e(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}_e(k)\mathbf{U}(k), \quad (10)$$

$$\text{其中, } \mathbf{X}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k) - \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}, \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_e(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & 0 \\ \mathbf{CA}(k) & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(k) & 0 \\ \mathbf{CB}(k) & 0 \end{bmatrix}。$$

设计多步状态反馈控制器

$$\mathbf{U}(k+i|k) = \mathbf{K}_i \mathbf{X}(k+i|k), i=0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

其中, $\mathbf{K}_i$ 是反馈增益矩阵。

定义集合 $\bar{\Omega}_e \triangleq \text{Co}\{[\mathbf{A}_e^1, \mathbf{B}_e^1], [\mathbf{A}_e^2, \mathbf{B}_e^2], \dots, [\mathbf{A}_e^{2^n}, \mathbf{B}_e^{2^n}]\}$, 满足 $\Pr\{[\mathbf{A}_e(k), \mathbf{B}_e(k)] \in \bar{\Omega}_e\} \leq \hat{p}$ 。

引理 1^[14] 对于满足 $\mathbf{GX}(k+i) \leq h$ 且 $\Pr\{\mathbf{X}(k+i+1) \in \Omega_{i+1} | \mathbf{X}(k+i) \in \Omega_i\} \leq \hat{p}, i=0, 1, \dots, N$ 的多步概率集 $\{\Omega_i\}_{i=0}^N, \Omega_i = \{\mathbf{X} | \mathbf{X}^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{X} \leq 1\}, \mathbf{Q}_i > 0$ 。若状态变量 $\mathbf{X}(k) \in \Omega_0$, 则 $\Pr\{\mathbf{X}(k+i) \in \Omega_i\} \leq \hat{p}, i=1, 2, \dots, N+1$, 即投资组合系统(4)在 $k+i$ 时刻均满足投资机会约束(5), 其中 $\Omega_{N+1} = \Omega_N, \mathbf{G} = [\mathbf{0}_{1 \times (n+1)}, 1], h \in \mathbf{R}$ 。

根据引理 1, 将投资机会约束(5)转化为多步概率集约束。

定理 1 针对增广系统(10), 若反馈增益矩阵 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$, 则投资组合系统(4)在控制器(11)的作用下满足投资机会约束(5)的充分条件是: 存在矩阵 $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Y}_i \in \mathbf{R}^{(n+2) \times (n+2)}$ 和常数 W_i^1 , 使得 $\mathbf{Q}_{N+1} = \mathbf{Q}_N, \mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{Y}_N$, 以及

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T(k) \\ \mathbf{X}(k) & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & * \\ \mathbf{A}_e^m \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_e^m \mathbf{Y}_i & \mathbf{Q}_{i+1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} W_i^1 & \mathbf{GQ}_i \\ * & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0, W_i^1 \leq h^2, \quad (14)$$

其中, $[\mathbf{A}_e^m, \mathbf{B}_e^m] (m=1, 2, \dots, 2^n)$ 表示集合 $\bar{\Omega}_e$ 的顶点。

证明 根据 Surch 补引理, $\mathbf{X}(k) \in \Omega_0$, 即 $\mathbf{X}^T(k) \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{X}(k) \leq 1$, 该式等价于式(12)。因为 $\Pr\{[\mathbf{A}_e(k+i), \mathbf{B}_e(k+i)] \in \bar{\Omega}_e\} \leq \hat{p}$, 所以由式(13)得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & * \\ \mathbf{A}_e(k+i) \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_e(k+i) \mathbf{Y}_i & \mathbf{Q}_{i+1} \end{bmatrix} \geq 0,$$

由于 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$, 且 $\mathbf{X}(k+i) \in \Omega_i$, 从而得到

$$\mathbf{X}^T(k+i) (\mathbf{A}_e(k+i) + \mathbf{B}_e(k+i) \mathbf{K}_i)^T \mathbf{Q}_{i+1}^{-1} (\mathbf{A}_e(k+i) + \mathbf{B}_e(k+i) \mathbf{K}_i) \mathbf{X}(k+i) \leq 1,$$

则 $\mathbf{X}^T(k+i+1) \mathbf{Q}_{i+1}^{-1} \mathbf{X}(k+i+1) \leq 1, \Pr\{\mathbf{X}(k+i+1) \in \Omega_{i+1} | \mathbf{X}(k+i) \in \Omega_i\} \leq \hat{p}$ 成立。此外, 由文献[15]定理 7, 式(14) 保证 $\mathbf{GX}(k+i) \leq h$ 成立。定理 1 得证。

定理 2 若反馈增益矩阵 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$, 则投资组合系统(4)在控制器(11)作用下满足投资约束(6)、(7)的充分条件是: 存在矩阵 $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{U}_i \in \mathbf{R}^{(n+2) \times (n+2)}$ 和常数 W_i^2 , 满足 $\mathbf{Q}_{N+1} = \mathbf{Q}_N, \mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{Y}_N$, 以及

$$\begin{bmatrix} W_i^2 & -(\mathbf{G}\mathbf{Q}_i + \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{Y}_i) \\ * & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0, W_i^2 \leq (\bar{y}(k+i) - \mathbf{C}(\mathbf{a} - \mathbf{u}))^2, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i & \mathbf{F}\mathbf{Y}_i \\ * & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0, U_{i,jj} \leq u_j^2, j=1,2,\dots,n+1, \quad (16)$$

其中: $\mathbf{F} = [\mathbf{I}_{n+1}, \mathbf{0}_{(n+1) \times 1}]$, $U_{i,jj}$ 表示对称矩阵 $\mathbf{U}_i$ 对角线上的元素; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})^T \in \mathbf{R}^{n+1}$, u_j 表示 $\mathbf{u}$ 的第 j 个元素, 即第 j 个资产交易金额的限制金额。

证明 约束(6)等价于 $\mathbf{G}\mathbf{X}(k) + \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{U}(k) \leq \mathbf{C}(\mathbf{a} - \mathbf{u}) - \bar{y}(k)$, 由文献[15]定理7, 存在常数 W_i^2 , 满足 $W_i^2 \leq (\bar{y}(k+i) - \mathbf{C}(\mathbf{a} - \mathbf{u}))^2$, 则式(15) 保证约束(6) 成立。

由约束(7) 得到 $|\Delta u_j(k+i|k)| \leq 2u_j, j=1,2,\dots,n+1$, 且

$$\max_{i \geq 0} |\Delta u_j(k+i|k)|^2 = \max_{i \geq 0} |(\mathbf{F}\mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{X}(k+i|k))_j|^2 \leq |(\mathbf{F}\mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{Y}_i^T \mathbf{F}^T)_j| = (\mathbf{F}\mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{Y}_i^T \mathbf{F}^T)_{jj},$$

所以, 存在矩阵 $\mathbf{U}_i \in \mathbf{R}^{(n+2) \times (n+2)}$, 满足 $U_{i,jj} \leq u_j^2, j=1,2,\dots,n+1$, 使得式(16) 保证约束(7) 成立。定理2 得证。

2.2 投资组合的 MPC

本节将投资组合优化问题归结为收益约束下的风险优化问题, 投资策略是通过跟踪参考财富轨迹, 在资产之间进行动态配置以实现风险最小化。投资组合风险由期望财富和参考财富之间的条件均方误差以及与交易金额有关的交易成本来衡量, 每个投资阶段的目标定义为

$$J(k+N|k) = \sum_{i=0}^N E \left\{ r(y(k+i|k) - \bar{y}(k+i|k))^2 + \Delta \mathbf{u}^T(k+i|k) \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \right\}, \quad (17)$$

其中, $r > 0$ 为投资组合财富与参考财富的误差权系数, $\mathbf{R} > 0$ 为交易金额加权矩阵, N 为预测时域。

综合以上分析, 投资机会约束下风险最小化的投资组合优化问题归结为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}(k|k)} J(k+N|k) \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \\ \text{约束条件(5)(7)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

通过求解投资组合优化问题(18) 得到最优投资组合, 即投资组合中每个资产的交易金额 $\mathbf{u}(k|k)$ 。

定理3 对于投资组合系统(4), 已知 k 时刻市场信息 $\mathbf{x}(k)$, 若反馈增益矩阵 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$, 则在控制器(11) 作用下, 投资组合优化问题(18) 转化为增广系统的 MPC 问题, 即存在常数 $\gamma > 0$, 满足

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T(k|k) \\ \mathbf{X}(k|k) & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & * & * & * \\ \mathbf{A}_e(k+i) \mathbf{Q}_i + \mathbf{B}_e(k+i) \mathbf{Y}_i & \mathbf{Q}_{i+1} & * & * \\ \sqrt{r} \mathbf{G} \mathbf{Q}_i & 0 & \gamma & * \\ \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{Y}_i & 0 & 0 & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_{N+1} = \mathbf{Q}_N, \mathbf{Y}_{N+1} = \mathbf{Y}_N$$

证明 针对增广系统(10), 投资目标函数(17) 的等价形式为

$$\min_{\mathbf{U}(k|k)} J(k+N|k) = \sum_{i=0}^N E \left\{ r(\mathbf{G}\mathbf{X}(k+i|k))^2 + \mathbf{U}^T(k+i|k) \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \mathbf{U}(k+i|k) \right\}. \quad (21)$$

考虑 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{X}(k+i|k)) = \mathbf{X}^T(k+i|k) \mathbf{P}_i \mathbf{X}(k+i|k)$, $\mathbf{P}_i = \gamma \mathbf{Q}_i^{-1}$, 则

$$V(\mathbf{X}(k+i+1|k)) - V(\mathbf{X}(k+i|k)) \leq -[r(\mathbf{G}\mathbf{X}(k+i|k))^2 + \mathbf{U}^T(k+i|k) \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \mathbf{U}(k+i|k)], \quad (22)$$

根据文献[20], $V(X(\infty|k)) = 0$ 。对式(22)进行求和,并在 k 时刻取期望,则

$$V(X(k+N|k)) - V(X(k|k)) \leq -J(k+N|k)。$$

由于 $P_i > 0$, 故 $V(X(k+i|k)) \geq 0$, 所以 $J(k+N|k) \leq V(X(k|k))$, 即目标函数 $J(k+N|k)$ 的上界为 $X^T(k|k)P_0X(k|k)$ 。

因此, 优化问题(21)转化为最小化目标函数 $J(k+N|k)$ 的上界, 即存在常数 $\gamma > 0$, 使 $V(X(k|k)) \leq \gamma$ 。令 $P_i = \gamma Q_i^{-1}$, 式(21)等价于 LMI 形式(19)。

设计控制器 $U(k+i|k) = K_i X(k+i|k)$ ($i = 0, 1, \dots, N$), $K_i = Y_i Q_i^{-1}$, 则式(22)为

$$X^T(k+i|k) \left[(A_e(k+i) + B_e(k+i)K_i)^T \gamma Q_{i+1}^{-1} (A_e(k+i) + B_e(k+i)K_i) - \gamma Q_i^{-1} + rG^T G + K_i^T F^T R F K_i \right] X(k+i|k) \leq 0,$$

则 $Q_i - (A_e(k+i)Q_i + B_e(k+i)Y_i)^T Q_{i+1}^{-1} (A_e(k+i)Q_i + B_e(k+i)Y_i) - r\gamma^{-1} Q_i^T G^T G Q_i - \gamma^{-1} Y_i^T F^T R F Y_i \geq 0$ 。

利用 Surch 补引理, 该式等价于 LMI 形式(20)。定理 3 得证。

根据定理 3, 将投资机会约束下风险最小化的投资组合优化问题(18)转化为以下 MPC 问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\{Q_i\}_{i=0}^N, \{Y_i\}_{i=0}^N, \{U_i\}_{i=0}^N, \{W_i\}_{i=0}^N(j=1,2)} \gamma \\ \text{s.t.} & \begin{cases} X(k+1) = A_e(k)X(k) + B_e(k)U(k), \\ X(k|k) = X(k), \\ U(k+i|k) = K_i X(k+i|k), K_i = Y_i Q_i^{-1}, \\ \text{式(12)(16)、(20)。} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

根据 MPC 策略, 投资组合系统(4)通过以下步骤进行滚动优化, 进而得到长期的多阶段最优投资组合策略。

1) 已知当前 k 时刻投资组合信息 $x(k)$, 求得增广系统(11)的初始时刻状态 $X(k|k) = X(k)$ 。

2) 利用 LMI 工具箱求解 MPC 问题(23), 得到当前 k 时刻最优控制器 $U(k|k) = K_0 X(k|k)$, 反馈增益矩阵 $K_0|_k = Y_0|_k Q_0|_k^{-1}$, 那么 k 时刻最优投资组合策略为 $u(k|k) = \Delta u(k|k) + u(k-1) = F Y_0|_k Q_0|_k^{-1} X(k|k) + u(k-1)$ 。

3) 将最优投资组合策略施加于投资系统(4), 得到 $x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k|k)$, $y(k) = Cx(k)$ 。

4) 在 $k+1$ 时刻, 重复上述步骤。

3 数据实例

本节通过实例验证投资策略的有效性, 使用的资产数据参考文献[5, 19]。投资者进行两个风险资产(AT&T Inc、美国银行)和一个无风险资产。在初始时刻, 投资者将所有投资财产均投资于无风险资产, 因此, 资产的初始值分别为 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, y(0) = \bar{y}(0) = 1$ 。

选取无风险资产收益率 $b = 0.001$, 预期时域和控制时域均为 10; 假设禁止卖空, 则 $a = (0, 0, 0)^T$; 交易限制金额为 $u = (1, 1, 1)^T$ 。误差权系数 $r = 0.002$, 交易金额加权矩阵为 $R = \text{diag}(0.001, 0.001, 0.001)$, 参考收益率 $d = 0.001$ 。根据投资者对投资损失的容忍度较小、适中、较大三种情形, 投资机会约束概率 p 分别取为 0.9、0.5、0.1, 通过仿真给出了不同容忍度下投资组合的期望财富和参考财富的轨迹(图 1), 以及投资于美国银行的交易金额(图 2)。

由图 1 可得: 投资组合的期望财富整体处于上升趋势, 说明经过一段时间后, 基于 MPC 的投资策略能够保证不同容忍度的投资者获得收益; 期望财富能够很好地跟踪参考财富, 说明该投资策略可以根据不同投资者的预期控制期望财富增长, 并有效控制投资风险。图 2 表明, 针对具有不同容忍度的投资者, 风险资产满足交易金额约束。综合图 1、2, 本文提出的 MPC 策略能够有效解决投资机会约束下长期投资组合优化问题。

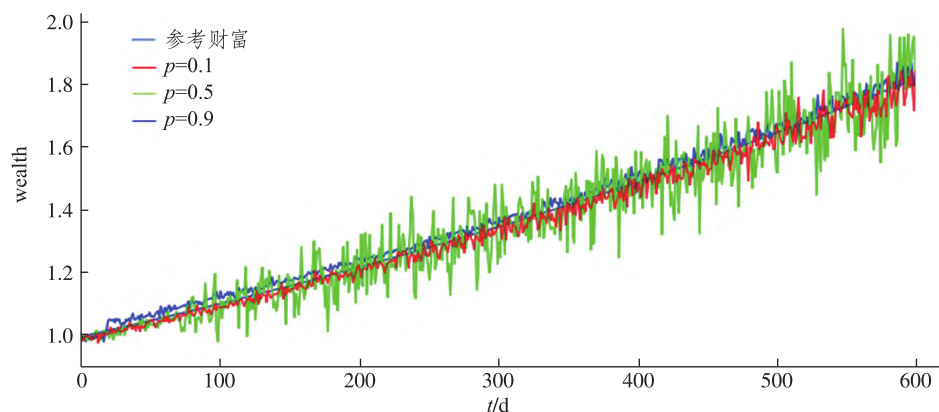


图1 投资组合的期望财富和参考财富变化曲线

Fig.1 Variation curves of the expected and reference wealth of portfolio

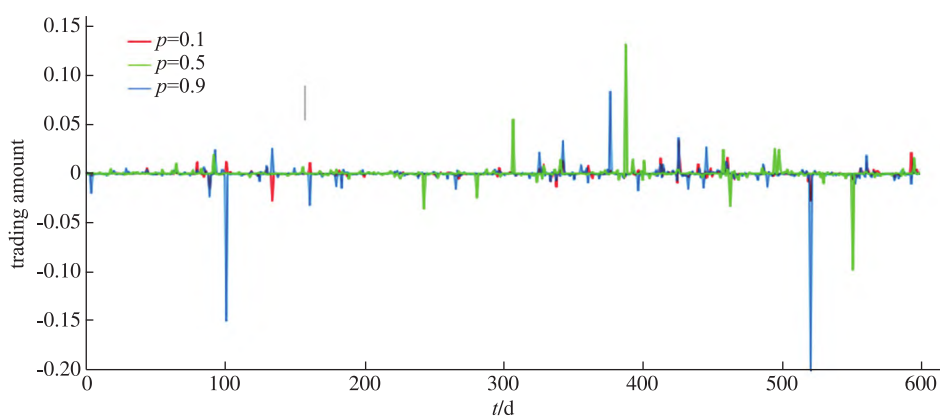


图2 投资于美国银行的交易金额

Fig.2 The trading amount invested in Bank of America

4 结论

本文基于 MPC 提出一种投资组合策略,解决了满足投资机会约束且最小化风险的投资组合优化问题。通过设计 MPC 和多步概率集,得到满足投资机会约束和风险优化目标的充分条件,同时将投资组合优化问题转化为 LMI 约束下有限时域 MPC 问题。最后,基于真实数据分析 MPC 策略的有效性,进一步说明该策略可以使不同风险容忍度的投资者获得预期收益。

参考文献:

- [1] MARKOWITZ H.Portfolio selection[J].Journal of Finance,1952,7(1):77-91.
- [2] MERTON R C.Lifetime portfolio selection under uncertainty;the continuous-time model[J].Review of Economics and Statistics,1969,51:247-256.
- [3] ZHOU X Y,LI D.Continuous-time mean-variance portfolio selection;a stochastic LQ framework[J].Applied Mathematical and Optimization,2000,42:19-33.
- [4] DOMBROVSKII V V,OBEDKO T.Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization[J].Automatica,2015,54:325-331.
- [5] DOMBROVSKII V V,PASHINSKAYA T.Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2020,30(3):1050-1070.
- [6] CHARNES A,COOPER W W.Chance-constrained programming[J].Management Science,1959,6(1):73-79.
- [7] 韩其恒,唐万生,李光泉.机会约束下的投资组合问题[J].系统工程学报,2002(1):87-92.

- [8] 刘庆伟,彭大衡.投资机会与 VaR 约束下的投资组合分析[J].经济数学,2002(4):85-89.
- [9] 郭福华,彭大衡,吴健雄.机会约束下的均值-VaR 投资组合模型研究[J].中国管理科学,2004(1):29-35.
- [10] 彭大衡,姚元端.带机会约束的动态投资决策模型研究[J].中国管理科学,2005(1):10-14.
- [11] WU Y Q, HAI T, ZHANG H. Multi-period investment portfolio selection of interval programming based on quantum optimization algorithm[J]. Studies in Informatics and Control, 2018, 27(4):481-492.
- [12] YANG X Y, CHEN J G, LIU W L, et al. A multi-period fuzzy portfolio optimization model with investors' loss aversion[J]. Soft Computing, 2023, 27(24):18829-18842.
- [13] MAYNE Q D. Model predictive control: recent developments and future promise[J]. Automatica, 2014, 50(12):2967-2986.
- [14] LI J W, LI D W, XI Y G. Multi-step probabilistic sets in model predictive control for stochastic systems with multiplicative uncertainty[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(14):1698-1706.
- [15] LI J W, LI D W, XI Y G, et al. Formulation of MPC for multiplicative stochastic uncertainty by multi-step probabilistic sets[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3):10421-10426.
- [16] 凌爱凡,吕江林.具有联合椭圆不确定集与概率约束的鲁棒投资组合选择[J].控制与决策,2011,26(4):558-564.
- [17] DOMBROVSKII V V, OBEDKO T. Feedback predictive control strategies for investment in the financial market with serially correlated returns subject to constraints and trading costs[J]. Optimal Control Applications Methods, 2017, 38(5):908-921.
- [18] MEI X L, WANG Y C, ZHU W X. Bayesian nonparametric portfolio selection with rolling maximum drawdown control[J]. Quantitative Finance, 2023, 23(10):1497-1510.
- [19] KELLY M M D, NONGUEIRA T R C, ARGOLLO T J. Multiobjective model predictive control for portfolio optimization with cardinality constraint[J]. Expert Systems With Applications, 2022, 205:117639.
- [20] CHEN W, CHONG J O, MELVYN S. Constrained linear system with disturbance: convergence under disturbance feedback[J]. Automatica, 2008, 44(10):2583-2587.

Model Predictive Control for Portfolio with Investment Chance Constraint

ZHAO Yuhui, LIU Xiaohua

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: Under the premise of investment chance constraints, a portfolio optimization problem for minimizing investment risk was proposed based on tracking strategy. By constructing a state space model of the portfolio, and designing a multi-step model predictive controller, the investment chance constraint was transformed into multi-step probability set constraints, and the portfolio strategy based on model predictive control was proposed. Finally, the effectiveness of the investment strategy was verified by analyzing the data for investors with different risk loss tolerance.

Keywords: portfolio optimization; investment chance constraint; tracking strategy; model predictive control; multi-step probability set