鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2025,41(1):83—88

Doi:10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2025.01.010

一个改进的非线性时滞系统 Razumikhin 型稳定性判据

尹燕娜,冯立康,姚立强

(烟台大学 数学与信息科学学院,山东 烟台 264005)

摘要:本文研究一类非线性时滞系统的稳定性问题,提出了一个改进的 Razumikhin 型全局一致实用指数稳定性判据。与现有的稳定性判据相比,所提出的稳定性结论突破了 Lyapunov 函数导数必须是负定的限制条件,允许其导数可以是不定的。为了说明稳定性判据的合理性,给出了仿真算例进行验证。

关键词:Razumikhin 方法;时滞系统;实用指数稳定

中图分类号:TP273 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-8020(2025)01-0083-06

许多实际系统例如通讯系统、电力系统、网络传输系统等,其当前状态不仅仅与当前时刻的状态有关,也受过去某段时间或某时刻状态的影响,将含有这种特征的系统称为时滞系统。时滞的存在不仅会导致系统的动态性能变差,甚至会影响系统的稳定性。因此,近几十年来,很多学者对时滞系统进行了深入研究,取得了大量的研究成果[1—7]。

研究时滞系统的稳定性是深入探究时滞系统各种性能的基础,关于时滞系统的研究方法主要是频域方法[8]和时域方法[9]。频域方法是最早研究时滞系统稳定性所采用的方法,主要通过特征根的分布判别系统的稳定性,但该方法难以处理时变时滞项,且运算也相对复杂。时域方法克服了频域方法对时变时滞处理的局限性,是目前处理时滞系统稳定性和进行控制设计的主要方法。时域方法主要包括 Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函法和 Lyapunov-Razumikhin(L-R)函数法。文献[10—12]使用 L-K 方法研究时滞系统的稳定性以及控制问题,但需要时滞函数的导数小于 1;文献[13—15]采用 L-R 方法克服了对时滞函数导数的限制,研究时滞系统的稳定性和控制设计问题。其中,文献[13]基于 Razumikhin 方法研究了时滞系统的输出反馈问题;文献[14]建立了改进的一致渐近稳定的稳定性判据,降低了文献[4]中定理的保守性;文献[15]利用 L-R 方法和脉冲控制理论,得到脉冲时滞系统的一致稳定和全局指数稳定的稳定性判据。

以上研究成果要求 Lyapunov 函数的导数必须是负定的。文献[16]提出了新的比较原理,通过引入时变不定号函数,得到了非线性时滞系统一致渐近稳定的稳定性判据,放宽了对 Lyapunov 函数导数负定的要求。文献[17]进一步提出了全局一致渐近稳定的稳定性定理,该定理突破了 Lyapunov 函数导数负定的限制,允许其导数是不定的。文献[18]对具有时滞的时变切换系统,借助比较原理分别研究了输入到状态稳定和积分输入到状态稳定。文献[19]提出了改进的一致渐近稳定的稳定性判据,通过引入时间尺度型的一致渐近稳定函数,允许 Lyapunov 函数的导数可以是非负的。文献[20]基于一致渐近稳定函数的概念、性质以及改进的比较原理,考虑了在 p 阶矩意义下的渐近稳定和(积分)输入到状态稳定,所得到的稳定性判据允许 Lyapunov 函数的导数是不定的。

上述文献大多研究系统的一致渐近稳定性,而实用稳定更具有实际应用价值。在上述文献研究的基础上,本文通过 L-R 方法研究了非线性时滞系统的实用稳定性,改进 Razumikhin 型稳定性定理,利用

收稿日期:2024-10-15;修回日期:2024-11-29

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2020MA033)

通信作者简介:姚立强(1978—),男,副教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机非线性系统的自适应控制和鲁棒控制。E-mail:liqiangyaoyt@163.com

Lyapunov 函数和一致渐近稳定函数建立了全局一致实用指数稳定的稳定性判据。该判据突破了要求 Lyapunov 函数导数是负定的限制,且采用的 Lyapunov 函数证明方法较文献[20]更加简便。

1 问题描述

考虑如下非线性时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}_{\delta}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),t),t\geqslant t_0, \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态,$\tau(t):[t_0,\infty)\to[0,\bar{\tau}]$ 是时滞函数,且 $\bar{\tau}\geqslant 0$;$\boldsymbol{f}_{\delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),t)\in\mathbf{R}^n$ 含有可调参数 $\boldsymbol{\delta}\in\mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{f}_{\delta}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},t)=\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{f}_{\delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),t)$ 关于 t 分段连续,关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}(t-\tau(t))$ 满足局部 Lipschitz 条件;系统初始条件 $\boldsymbol{x}_{t_0}=\boldsymbol{x}(t_0+v)=\boldsymbol{\xi}=\{\boldsymbol{\xi}(v):-\bar{\tau}\leqslant v\leqslant 0\}\in C^b([-\bar{\tau},0];\mathbf{R}^n)$。

定义 1[1] 对于系统(1),如果存在 $\mathcal{KL}$ 类函数 β 和常数 $d_{\beta}>0$,对任意 $t\geqslant t_0$,使得 $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{\xi}\|,t-t_0)+d_{\beta}$,则称系统(1)是全局一致实用渐近稳定,这里通过调节参数 $\boldsymbol{\delta}$ 使 d_{β} 被调节到任意小;进一步,如果 $\beta(\|\boldsymbol{\xi}\|,t-t_0)=\kappa_{\beta}\|\boldsymbol{\xi}\|\mathrm{e}^{-c_{\beta}(t-t_0)}$,则称系统(1)是全局一致实用指数稳定,其中 $\kappa_{\beta}>0,c_{\beta}>0$。

注 1 在定义 1 中,若 $d_{\beta}=0$,则称系统(1)是全局一致渐近稳定;当 $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\kappa_{\beta}\|\boldsymbol{\xi}\|\mathrm{e}^{-c_{\beta}(t-t_0)}$ 时,称系统(1)是全局一致指数稳定。

定义 2[17] 对于系统 $\dot{\chi}(t)=\mu(t)\chi(t)$, $\mu(t)$ 是分段连续函数,如果存在 $\mathcal{KL}$ 类函数 β,使得 $|\chi(t)|\leqslant\beta(|\chi_0|,t-t_0)$,则称系统是全局一致渐近稳定,$\mu(t)$ 为一致渐近稳定函数。

注 2 由文献[17]可知,$\mu(t)$ 为一致渐近稳定函数的充要条件是存在常数 $\lambda>0$ 和 $\zeta\geqslant 0$,使得 $\int_{t_0}^{t}\mu(s)\mathrm{d}s\leqslant-\lambda(t-t_0)+\zeta$。

2 稳定性定理

定理 1 对于系统(1),如果存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}([t_0,\infty)\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}_+)$,一致渐近稳定函数 $\mu(t)$,以及常数 $p_1>0,p_2>0,q>1,d_{\tau}>0$,使得

$$p_1|\boldsymbol{x}|^2\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant p_2|\boldsymbol{x}|^2, \tag{2}$$

当 $V(t-\tau(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\leqslant qV(t,\boldsymbol{x}(t))$,有

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\mu(t)V(t,\boldsymbol{x}(t))+d_{\tau}, \tag{3}$$

这里可以通过调节参数 $\boldsymbol{\delta}$ 使 d_{τ} 任意小,则系统(1)是全局一致实用指数稳定。

证明 令 $\eta=\min\left\{\lambda,\dfrac{\ln q}{\bar{\tau}}\right\}$,定义

$$W(t)=\max_{-\bar{\tau}\leqslant v\leqslant 0}\{\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v))\},t\geqslant t_0, \tag{4}$$

其中,$\tilde{\eta}=\eta-\varepsilon_0,\varepsilon_0\in(0,\eta)$。对任意 $t\in[t_0,\infty)$,定义 $v^*=\max\{v:W(t)=\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v)),-\bar{\tau}\leqslant v\leqslant 0\}$,结合式(4),可以得到 $W(t)=\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v^*)}V(t+v^*,\boldsymbol{x}(t+v^*)),v^*\in[-\bar{\tau},0]$。

情形 1:如果 $v^*=0$,由 v^* 的定义可知,对任意 $v\in[-\bar{\tau},0]$,

$$\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v))\leqslant\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v^*)}V(t+v^*,\boldsymbol{x}(t+v^*))=\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}V(t,\boldsymbol{x}(t))$$

成立,这说明

$$V(t-\tau(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\leqslant\mathrm{e}^{\tilde{\eta}\bar{\tau}}V(t,\boldsymbol{x}(t))。 \tag{5}$$

如果 $V(t,\boldsymbol{x}(t))=0$,通过式(2)、(5),得到 $\boldsymbol{x}(t-\tau(t))=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$。这意味着,对任意小的 $\Delta t>0$,有 $W(t+\Delta t)=0$,进而得到

$$\mathrm{D}^+W(t)=\limsup_{\Delta t\to 0^+}\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}=0。$$

如果 $V(t,\boldsymbol{x}(t))>0$,那么由式(5)可知,存在常数 $q(q=\mathrm{e}^{\tilde{\eta}\bar{\tau}}>1)$,使得 $V(t-\tau(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\leqslant qV(t,\boldsymbol{x}(t))$。因此,根据式(3),$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\mu(t)V(t,\boldsymbol{x}(t))+d_\tau$。进一步得到

$$H(t+\Delta t)-H(t)=\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s}\mu(\nu)\mathrm{d}\nu}(\dot{V}(s,\boldsymbol{x}(s))-\mu(s)V(s,\boldsymbol{x}(s)))\mathrm{d}s\leqslant d_\tau\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s}\mu(\nu)\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}s,$$

这里 $H(t)=\left(\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(s)\mathrm{d}s}\right)V(t,\boldsymbol{x}),\Delta t>0$。从而

$$\begin{aligned}W(t+\Delta t)&=\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}V(t+\Delta t,\boldsymbol{x}(t+\Delta t))\leqslant\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}V(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}\mu(s)\mathrm{d}s}+d_\tau\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{\int_s^{t+\Delta t}\mu(\nu)\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}s\leqslant\\&\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}V(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}\mu(s)\mathrm{d}s}+d_\tau\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{e}^{-\lambda(t+\Delta t-s)+\zeta}\mathrm{d}s\leqslant\\&\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}V(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}\mu(s)\mathrm{d}s}+d_\tau\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}\mathrm{e}^{\zeta}\Delta t\triangleq W(t)\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}(\mu(s)+\tilde{\eta})\mathrm{d}s}+U\Delta t,\end{aligned}$$

其中 $U=d_\tau\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+\Delta t)}\mathrm{e}^{\zeta}$。由洛必达法则,可得

$$\mathrm{D}^+W(t)=\lim_{\Delta t\to0^+}\sup\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}\leqslant\lim_{\Delta t\to0^+}\sup\frac{W(t)[\mathrm{e}^{\int_t^{t+\Delta t}(\mu(s)+\tilde{\eta})\mathrm{d}s}-1]+U\Delta t}{\Delta t}=\tilde{\mu}(t)W(t)+d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t},$$

其中,$\tilde{\mu}(t)=\mu(t)+\tilde{\eta}$ 是一致渐近稳定函数。事实上,$\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}(\mu(s)+\tilde{\eta})\mathrm{d}s\leqslant-(\lambda-\tilde{\eta})(t-t_0)+\zeta$,这里 $\lambda-\tilde{\eta}>0,\zeta\geqslant0$。

情形 2:如果 $v^*<0$,结合 v^* 的定义可以得 $\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v))<\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v^*)}V(t+v^*,\boldsymbol{x}(t+v^*))$,对任意 $v^*<v\leqslant0$,这意味着

$$\mathrm{D}^+W(t)=\lim_{\Delta t\to0^+}\sup\frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t}\leqslant0。$$

综合情形 1、2 可知,当 $t\geqslant t_0$ 时,$\mathrm{D}^+W(t)\leqslant\tilde{\mu}(t)W(t)+d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}$ 或 $\mathrm{D}^+W(t)\leqslant0$。当 $\mathrm{D}^+W(t)\leqslant0$ 时,结合 $W(t)$ 的定义,得到

$$\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\max_{-\bar{\tau}\leqslant v\leqslant0}\{\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v))\}\leqslant W(t_0)。\tag{6}$$

当 $\mathrm{D}^+W(t)\leqslant\tilde{\mu}(t)W(t)+d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}$ 时,引入 $\widetilde{W}(t)=\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s}W(t)$,对 $\widetilde{W}(t)$ 求导知

$$\mathrm{D}^+\widetilde{W}(t)=\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s}(\mathrm{D}^+W(t)-\tilde{\mu}(t)W(t))\leqslant d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{e}^{\left(\tilde{\eta}t-\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s\right)},$$

对不等式左右两边在 $[t_0,t]$ 上积分,得

$$\begin{aligned}W(t)&\leqslant\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s}W(t_0)+d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\left(\tilde{\eta}s+\int_s^t\tilde{\mu}(\nu)\mathrm{d}\nu\right)}\mathrm{d}s\leqslant\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s}W(t_0)+d_\tau\mathrm{e}^{\zeta}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{[\tilde{\eta}s-(\lambda-\tilde{\eta})(t-s)+\zeta]}\mathrm{d}s=\\&\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\tilde{\mu}(s)\mathrm{d}s}W(t_0)+d_\tau\mathrm{e}^{2\zeta}\mathrm{e}^{-(\lambda-\tilde{\eta})t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\leqslant\mathrm{e}^{-(\lambda-\tilde{\eta})(t-t_0)}\mathrm{e}^{\zeta}W(t_0)+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t},\end{aligned}$$

进一步得到

$$\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\max_{-\bar{\tau}\leqslant v\leqslant0}\{\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v)}V(t+v,\boldsymbol{x}(t+v))\}\leqslant\mathrm{e}^{-(\lambda-\tilde{\eta})(t-t_0)}\mathrm{e}^{\zeta}W(t_0)+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}。\tag{7}$$

综合式(6)、(7)推出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}V(t,\boldsymbol{x}(t))&\leqslant\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t+v^*)}V(t+v^*,\boldsymbol{x}(t+v^*))\leqslant\mathrm{e}^{\zeta}W(t_0)+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t}\leqslant\\&\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}(t_0+v^*)}V(t_0+v^*,\boldsymbol{x}(t_0+v^*))+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta}\mathrm{e}^{\tilde{\eta}t},\end{aligned}\tag{8}$$

进一步,由式(2)、(8)推得

$$p_1|\boldsymbol{x}(t)|^2\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\mathrm{e}^{-\tilde{\eta}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\zeta}V(t_0+v^*,\boldsymbol{x}(t_0+v^*))+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta}\leqslant p_2\mathrm{e}^{-\tilde{\eta}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\zeta}\|\boldsymbol{\xi}\|^2+\frac{d_\tau}{\lambda}\mathrm{e}^{2\zeta},$$

即

$$|\boldsymbol{x}(t)|^2 \leqslant \frac{p_2}{p_1}e^{\zeta}e^{-\bar{\eta}(t-t_0)} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \frac{d_\tau}{\lambda p_1}e^{2\zeta},$$

根据 ε_0 的任意性以及文献[5]中引理6,可得

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant \left[\frac{p_2}{p_1}e^{\zeta}e^{-\bar{\eta}(t-t_0)} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \frac{d_\tau}{\lambda p_1}e^{2\zeta}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{p_2}{p_1}e^{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\bar{\eta}}{2}(t-t_0)} \|\boldsymbol{\xi}\| + \left(\frac{d_\tau}{\lambda p_1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\zeta}。 \tag{9}$$

根据定义1,系统(1)是全局一致实用指数稳定。

注3 (i) 根据定理1的证明,如果式(3)中 $d_\tau = 0$,结合式(9),系统(1) 是全局一致指数稳定。(ii) 如果定理1中$\mu(t) = -c(c > 0)$,$d_\tau = 0$,那么定理1即为文献[4] 中的定理4.2;如果 $d_\tau = 0$,则定理1为文献[17] 中的定理1。(iii) 相比于文献[4,14],本文突破了 Lyapunov 函数导数是负定的限制,允许其导数是不定的,根本原因是引入的一致渐近稳定函数$\mu(t)$的符号不定。(iv) 与文献[21] 的引理1相比,本文提出的稳定性判据中参数 d_τ 是可调的,这使得系统能够实现实用稳定的性能,而不是系统状态最终有界,因此本文得到的结论是对现有结论的进一步改进。

3 仿真算例

考虑如下含有可调参数 δ 的非线性时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1(t)x_1 + x_2 + x_1(t-\tau(t)), \\ \dot{x}_2 = \mu_2(t)x_2 + x_2(t-\tau(t)) + \delta\sin x_1, \end{cases} \tag{10}$$

其中,$\mu_1(t) = -2 - 0.5c + 0.2t\cos t^2$,$\mu_2(t) = -2.5 - 0.5c + 0.2t\cos t^2$,$c > 1$。

令 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$,选取 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$,则

$$\dot{V} \leqslant \mu_1(t)x_1^2 + |x_1||x_2| + |x_1||x_1(t-\tau(t))| + \mu_2(t)x_2^2 + |x_2||x_2(t-\tau(t))| + \delta|x_2| \leqslant$$

$$\mu_3(t)\sum_{j=1}^{2}x_j^2 + 0.5\sum_{j=1}^{2}x_j^2(t-\tau(t)) + 0.5\delta^2,$$

其中 $\mu_3(t) = -1 - 0.5c + 0.2t\cos t^2$。

如果 $V(t-\tau(t), \boldsymbol{x}(t-\tau(t))) \leqslant qV(t, \boldsymbol{x}(t))$,$q > 1$,也就是 $\sum_{j=1}^{2}x_j^2(t-\tau(t)) \leqslant q\sum_{j=1}^{2}x_j^2(t)$,那么,

$$\dot{V} \leqslant \mu_3(t)\sum_{j=1}^{2}x_j^2 + 0.5q\sum_{j=1}^{2}x_j^2 + 0.5\delta^2 \leqslant (-1 - 0.5c + 0.5q + 0.2t\cos t^2)\sum_{j=1}^{2}x_j^2 + 0.5\delta^2。$$

取 $q = c$,进而得到

$$\dot{V} \leqslant (-1 + 0.2t\cos t^2)\sum_{j=1}^{2}x_j^2 + 0.5\delta^2 \triangleq \mu(t)V + 0.5\delta^2,$$

其中 $\mu(t) = 2(-1 + 0.2t\cos t^2)$。由于$\int_{t_0}^{t}\mu(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_{t_0}^{t}(-2 + 0.4\nu\cos\nu^2)d\nu \leqslant -2(t-t_0) + 0.4$,所以$\mu(t)$ 是一致渐近稳定函数。根据定理1可知,系统(10) 是全局一致实用指数稳定。

在仿真中,选取时滞函数为 $\tau(t) = 0.1 + 0.1\sin t$,系统初值分别为 $x_1(0) = 2$,$x_2(0) = -2$,参数 $c = q = 8$,$\delta = 1$,仿真结果见图1 ~ 2。由图1可见,系统的状态可以收敛到0附近的很小邻域内;图2刻画了当 $q = 8$ 时,$R(t) = V(t-\tau(t), \boldsymbol{x}(t-\tau(t))) - qV(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant 0$ 的取值情况。因此,仿真结果表明本文所提出的稳定性判据是有效的。

注4 对于系统(10),若 $\delta \neq 0$,使用现有的稳定性判据,例如文献[17]的定理1、文献[4]的定理4.2,无法判别该系统的稳定性,因此,本文提出的 Razumikhin 型稳定性判据弥补了已有文献的不足。

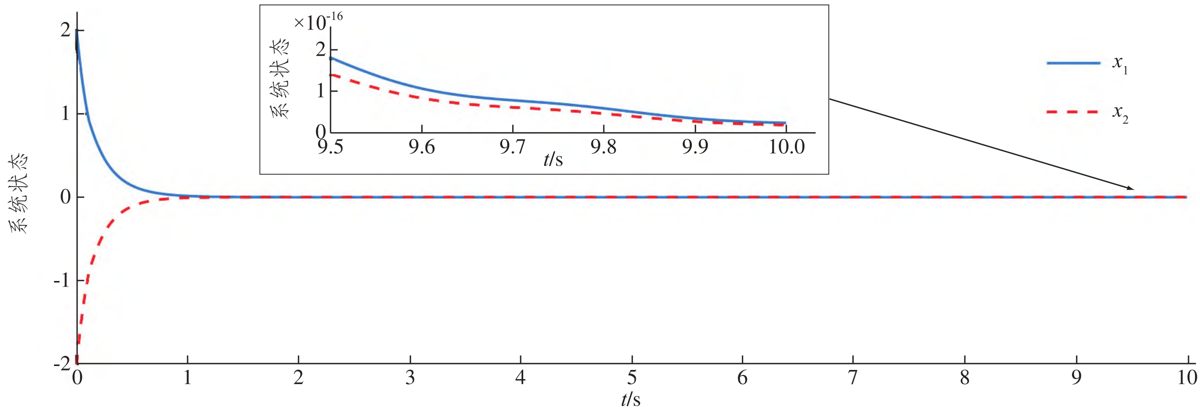

图 1　系统状态响应曲线

Fig.1 The response curves of system states

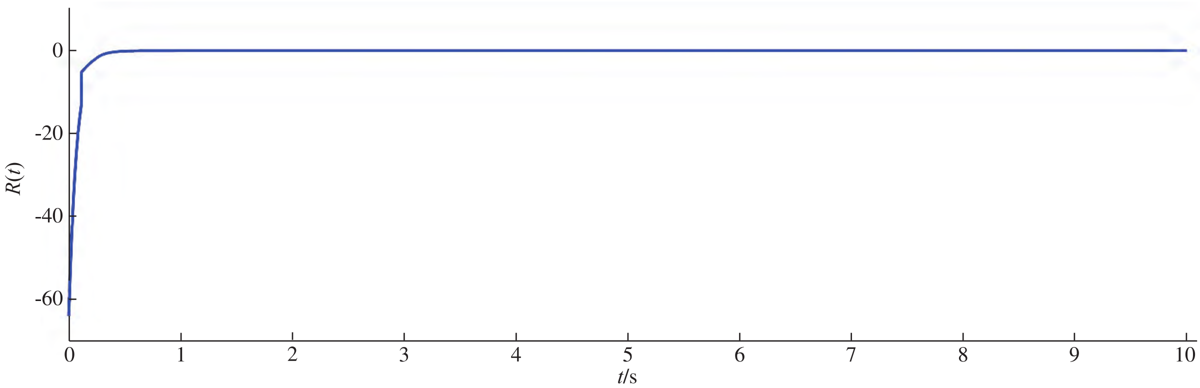

图 2　Razumikhin 条件的验证结果

Fig.2 The validation results of Razumikhin condition

4　结论

通过引入一致渐近稳定函数,本文提出了一个改进的 Razumikhin 型全局一致实用指数稳定性判据,所提出的稳定性判据放宽了对 Lyapunov 函数导数严格负定的限制。最后,通过仿真算例验证了所提稳定性判据的有效性。

参考文献:

[1] HAMED B B,ELLOZE I,HAMMAMI M A.Practical uniform stability of nonlinear differential delay equations[J].Mediterranean Journal of Mathematics,2011,8(4):603-616.

[2] YAO L Q.Improved stability theorems of random nonlinear time delay systems and their application[J].Journal of the Franklin Institute,2022,359:5596-5618.

[3] WANG T C,LUO X X,LI W Q.Razumikhin-type approach on state feedback of stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2017,27(16):3124-3134.

[4] HALE J K.Theory of functional differential equations[M].New York:Springer-Verlag,1977.

[5] KHOO S,YIN J L,MAN Z H,et al.Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form[J].Automatica,2013,49(5):1403-1410.

[6] 王天成,李刚.基于 Razumikhin 方法的随机时变时滞非线性系统的状态反馈[J].控制与决策,2015,30(8):1519-1522.

[7] 庄迪,王天成.基于 Razumikhin 方法的三阶非线性时变时滞系统的输出反馈镇定[J].鲁东大学学报(自然科学

版),2022,38(1):27-33.

[8] KAO C Y,LINCOLN B.Simple stability criteria for systems with time-varying delays[J].Automatica,2004,40(8):1429-1434.

[9] HE Y, WANG Q G,XIE L H,et al.Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52(2):293-299.

[10] XUE L R,LIU Z G,SUN Z Y,et al.New results on robust tracking control for a class of high-order nonlinear time-delay systems[J].International Journal of Systems Science,2019,50(10):2002-2014.

[11] WANG W L,LIN Y,ZHANG X.Global adaptive tracking for a class of nonlinear time-delay systems[J].International Journal of Control,2018,93(6):1317-1327.

[12] WANG H,ZHU Q X.Global stabilization of a class of stochastic nonlinear time-delay systems with SISS inverse dynamics[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2020,65(10):4448-4455.

[13] 尹力,王天成.基于 Razumikhin 方法的 n 阶随机非线性时变时滞系统的输出反馈控制[J].鲁东大学学报(自然科学版),2021,37(4):289-297.

[14] XU B G, LIU Y Q. An improved Razumikhin-type theorem and its applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1994,39(4):839-841.

[15] LI X D,DING Y H.Razumikhin-type theorems for time-delay systems with persistent impulses[J].System and Control Letters,2017,107:22-27.

[16] NING C Y,HE Y,WU M,et al.Improved Razumikhin-type theorem for input-to-state stability of nonlinear time-delay systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2014,59(7):1983-1988.

[17] ZHOU B,EGOROV A V.Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems[J].Automatica,2016,71:281-291.

[18] WU X T,TANG Y,CAO J D.Input-to-state stability of time-varying switched systems with time-delays[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2019,64(6):2537-2544.

[19] LU X D,LI H T.Extensions of Razumikhin-type stability theorems for nonlinear time-delay systems on time scales[J].International Journal of Control,2020,95(1):259-268.

[20] ZHOU B,LUO W W.Improved Razumikhin and Krasovskii stability criteria for time-varying stochastic time-delay systems[J].Automatica,2018,89:382-391.

[21] HUA C C,FENG G,GUAN X P.Robust controller design of a class of nonlinear time delay systems via backstepping method[J].Automatica,2008,44(2):567-573.

An Improved Stability Criterion of Razumikhin-type for Nonlinear Time-delay Systems

YIN Yanna, FENG Likang, YAO Liqiang

(School of Mathematics and Information Sciences,Yantai University,Yantai 264005,China)

Abstract:In this paper,the stability problem of a class of nonlinear systems with time delay was studied,and a new global uniformly practical exponential stability criterion of Razumikhin-type was presented.Compared with the existing stability criterion,the proposed stability result removes the constraint that the derivative of Lyapunov function must be negative definite,and allows its derivative to be indeterminate.In order to illustrate the rationality of the stability criterion,a simulation example was given to verify.

Keywords:Razumikhin method;time-delay system;practical exponential stability