

Doi:10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2024.04.006

有界不确定扰动下四旋翼无人机的避障跟踪控制

董鹤翔,张 会

(烟台大学 数学与信息科学学院,山东 烟台 264005)

摘要:针对具有有界不确定扰动的四旋翼无人机系统,本文研究了避障跟踪控制问题。首先,采用滑模反推方法,设计标称跟踪控制器实现无人机的跟踪任务,结合双曲正切函数降低系统抖振现象。其次,构造控制障碍函数,建立安全控制器的集合,使得集合内的控制器均能驱动系统远离障碍物。最后,将控制障碍函数约束与二次规划结合,寻求与标称跟踪控制器距离最小的安全控制器,在实现避障的同时使四旋翼无人机尽可能跟踪到参考信号。仿真结果表明无人机可以有效避开障碍物,并快速跟踪参考信号,使得跟踪误差收敛到足够小的范围内,从而验证了所设计控制器的有效性。

关键词:四旋翼无人机;控制障碍函数;二次规划;避障;跟踪控制

中图分类号:0231.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-8020(2024)04-0334-09

近年来,全球无人机市场经历了指数级别的增长,不同类型的旋翼无人机(unmanned aerial vehicle, UAV)被广泛应用于各行各业。其中,四旋翼无人机因其设计简单,且拥有垂直起降能力和卓越的稳定性,在航天摄影、农业巡检和应急响应等诸多领域^[1]发挥重要作用。然而,当前针对四旋翼无人机的控制技术尚存不足,其控制难点主要源于四旋翼无人机所特有的欠驱动性、系统强耦合性以及飞行过程中的非线性特征,这些技术难题使得四旋翼无人机相较于多旋翼无人机在控制上更具挑战性。另外,实际飞行环境中存在各种障碍物与不确定扰动,这些不可预测的因素可能会对无人机的跟踪性能和安全性造成不同程度的影响。因此,提升四旋翼无人机的控制技术,以及在复杂环境下的避障能力和跟踪性能^[2]是当前四旋翼无人机控制的一个重要课题。

早期针对四旋翼无人机的研究主要集中于增强无人机的跟踪性能^[3]。为了使无人机更好地跟踪到参考信号,人们开发并应用了大量先进的控制方法,如 Backstepping 控制^[4-5]和滑模控制^[6-7]等。Backstepping 控制技术是解决四旋翼无人机轨迹跟踪控制问题的有效方法,将整个系统分为两个相互连接的子系统,通过设计一个反推控制器确保四旋翼飞行器达到期望的位置和姿态^[8]。但传统的 Backstepping 控制方法难以应对现实环境中存在的诸多干扰,所设计的控制器存在鲁棒性不强的缺陷,而滑模控制很好地解决了该问题,但随之产生的系统抖振问题常对控制器的跟踪性能产生不利影响。

除了考虑四旋翼无人机的跟踪性能,无人机的安全性能同样得到重视^[9]。无人机在执行跟踪任务时经常面临与各种障碍物碰撞的风险,需要对跟踪控制器实时修正以使无人机能够避开障碍物,保证自身安全且满足跟踪性能。在无人机避障技术的研究中,大多数研究侧重于对系统输出进行约束^[10]。近年来,控制障碍函数^[11-12]成为保证系统安全的关键技术,使系统在面临安全风险时能够使自身保持在安全集内。文献[13]提出倒数控制障碍函数与零化控制障碍函数,将集合的前向不变性和安全性紧密联合起来;文献[14-15]将控制障碍函数与二次规划相结合,使无人机能够有效地避开路径上的障碍物。然而,这些针对四旋翼无人机安全问题的研究大多局限于安全领域,忽视了跟踪性能指标要求。

基于以上讨论,本文提出一种将 Backstepping 控制与滑模控制相结合的新型控制策略。该策略融合两种控制方法的优势,在提升控制系统鲁棒性的同时,有效应对环境中的不确定性扰动;通过引入双

收稿日期:2024-03-20;修回日期:2024-05-25

基金项目:国家自然科学基金(61703359)

通信作者简介:张会(1986—),女,副教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机切换控制、非线性自适应控制和机电系统控制。

E-mail:zhanghui-0717@163.com

曲正切函数,抑制了传统滑模控制中的抖振问题。此外,将控制障碍函数引入避障控制器的设计,不仅使无人机与障碍物之间的距离关系更为明确,而且使避障控制器的设计更为直观和高效。

1 问题提出与准备知识

1.1 问题提出

首先,建立坐标系 $(O_b-X_bY_bZ_b)$ 和惯性坐标系 $(O_g-X_gY_gZ_g)$, 四旋翼无人机的结构如图1所示。

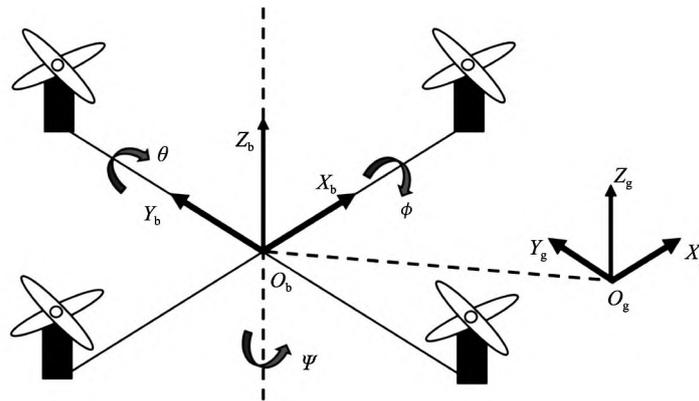


图1 四旋翼无人机的结构图

Fig.1 Structure diagram of a quadrotor UAV

当无人机在近地高度低速飞行时,欧拉角速度近似等于体坐标系中的角速度,欧拉角矩阵近似等价于单位矩阵^[16]。下面给出四旋翼无人机模型如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{m}u\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_3 - g\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{d}_p, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}_\eta, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{p} = [x, y, z]^T \in \mathbf{R}^3, \boldsymbol{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \in \mathbf{R}^3$ 分别表示惯性坐标系下四旋翼无人机的位置和线速度; $\boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbf{R}^3$ 表示四旋翼无人机的姿态欧拉角, ϕ, θ, ψ 分别表示俯仰角、翻滚角与偏航角; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi]^T \in \mathbf{R}^3$ 表示在体坐标系下四旋翼无人机的角速度; u 和 m 分别为无人机的升力和质量, g 为重力加速度; $\boldsymbol{J} = \text{diag}(J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为惯性矩阵, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} 分别为四旋翼无人机沿对应坐标轴的转矩; $\boldsymbol{e}_3 = [0, 0, 1]^T, \boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T \in \mathbf{R}^3$ 为四旋翼无人机的扭矩; $\boldsymbol{d}_p = [d_x, d_y, d_z]^T \in \mathbf{R}^3$ 为位置扰动加速度, $\boldsymbol{d}_\eta = [d_\phi, d_\theta, d_\psi]^T \in \mathbf{R}^3$ 为姿态扰动加速度; \boldsymbol{R} 为惯性坐标系到体坐标系的旋转矩阵, 表示为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}.$$

假设1 存在已知的正常数 \bar{d} , 使得 $|d_i| < \bar{d}, i = x, y, z, \phi, \theta, \psi$ 。

注1 现实环境中扰动通常以正弦波或余弦波的形式存在, 因此假设1是合理的。

由模型(1)可知, 姿态子系统包含姿态变量 ϕ, θ, ψ 和控制输入变量 τ_1, τ_2, τ_3 , 属于全驱子系统; 位置子系统包含状态变量 x, y, z , 但仅有一个控制输入 u 直接控制高度 z , 因此位置子系统是欠驱动子系统。下面引入虚拟控制力 $\boldsymbol{F} = [u_x, u_y, u_z]^T = u\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_3 \in \mathbf{R}^3$, 将模型(1) 改写为全驱动系统, 再设计全驱动控制器使无人机各个状态都能跟踪到参考信号。

将虚拟控制力 \boldsymbol{F} 展开为:

$$\mathbf{F} = u [\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi, \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi, \cos \theta \cos \phi]^\top, \quad (2)$$

由式(2)可以反解出期望的翻滚角 ϕ_d 和俯仰角 θ_d :

$$\begin{cases} \phi_d = \arctan\left(\cos \theta_d \frac{u_x \sin \psi_d - u_y \cos \psi_d}{u_z}\right), \\ \theta_d = \arctan\left(\frac{u_x \cos \psi_d + u_y \sin \psi_d}{u_z}\right). \end{cases} \quad (3)$$

本文的控制目标是针对模型(1),基于反步滑模控制方法,并结合控制障碍函数约束,设计避障跟踪控制器,保证(i)位置状态 \mathbf{p} 能够与障碍物保持足够的安全距离,完成避障任务;(ii)系统状态 $[\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}]^\top = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^\top$ 跟踪给定的四阶连续可导参考信号 $[\mathbf{p}_d, \boldsymbol{\eta}_d]^\top = [x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d]^\top$, 这里 x_d, y_d, z_d, ψ_d 是任意给定的, ϕ_d 和 θ_d 由式(3)给出。

1.2 准备知识

给定非线性控制仿射系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 为该系统输入, 函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{g}(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 满足局部 Lipschitz 连续条件。对于任意初值 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, 总有一个最大时间间隔 $I(\mathbf{x}_0) = [t_0, t_{\max})$, 系统(4) 在时间间隔 $I(\mathbf{x}_0)$ 上存在唯一解 $\mathbf{x}(t)$; 特别地, 当系统(4) 是前向完备时, 有 $t_{\max} = \infty$ 。下面给出集合前向不变性与安全性的定义。

定义闭集 C , 满足: $C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : h(\mathbf{x}) \geq 0\}$, $\partial C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : h(\mathbf{x}) = 0\}$, $\text{Int}(C) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : h(\mathbf{x}) > 0\}$, 其中, $h(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续可微的。

定义1 若对于 $\forall \mathbf{x}_0 \in C$, 以及所有的 $t \in I(\mathbf{x}_0)$, 都有 $\mathbf{x}(t) \in C$, 那么称集合 C 关于系统(4) 前向不变。

定义2^[17] 若集合 C 前向不变, 那么称集合 C 安全。

定义3^[15] 对于常数 $a, b > 0$, 如果连续函数 $\alpha: (-b, a) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 严格递增, 且 $\alpha(0) = 0$, 则称函数 α 为扩展 K 类函数。

定义4 对于系统(4), 如果存在扩展 K 类函数 α 和集合 D , 满足 $C \subset D \subset \mathbf{R}^n$, 使得对于 $\forall \mathbf{x} \in D$, 连续可微函数 $h(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 满足 $\sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m} [L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha(h(\mathbf{x}))] \geq 0, \forall \mathbf{x} \in D$, 则称函数 $h(\mathbf{x})$ 是集合 C 的零化控制障碍函数, 其中 $L_f h(\mathbf{x})$ 和 $L_g h(\mathbf{x})$ 分别表示 $h(\mathbf{x})$ 关于函数 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 的李导数。

如果零化控制障碍函数 h 的导数以及函数 $\alpha(h(\mathbf{x}))$ 都满足局部 Lipschitz 条件, 那么函数 h 也是局部 Lipschitz 连续的。给定零化控制障碍函数 $h(\mathbf{x})$, \mathbf{u} 为 Lipschitz 连续控制器, 对所有 $\mathbf{x} \in C$, 定义集合

$$K_{\text{zcbf}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m : L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha(h(\mathbf{x})) \geq 0\}.$$

引理1^[13] 考虑定义4中集合 C 和 D , 如果函数 h 是集合 D 上的控制障碍函数, 则对任意的局部 Lipschitz 连续控制器 $\mathbf{u} \in K_{\text{zcbf}}(\mathbf{x})$, 都使得集合 C 前向不变。

引理2^[18] 对于任意给定的向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 和常数 $\varepsilon > 0$, 则 $0 \leq |\mathbf{x}| - \mathbf{x}^\top \tanh\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \leq \mu \varepsilon$, 其中 $\mu = 0.2785n$, n 为向量 \mathbf{x} 的维数。

2 四旋翼无人机标称跟踪控制器设计

本节设计标称跟踪控制器, 使四旋翼无人机系统状态 $[x, y, z, \phi, \theta, \psi]^\top$ 能够跟踪参考信号 $[x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d]^\top$ 。由于四旋翼无人机具有高动态、强耦合特性, 将其划分为位置子系统和姿态子系统, 分别设计控制器以满足跟踪性能, 并证明闭环误差系统达到实用稳定^[19]。

2.1 位置子系统控制器设计

根据模型(1)及虚拟控制力(2), 四旋翼无人机的位置子系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F} - g\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{d}_p. \end{cases} \quad (5)$$

首先,定义误差变量和滑模函数

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_p = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_d, \\ \boldsymbol{s}_p = \boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \dot{\boldsymbol{z}}_p, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{A}_{p1} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为待设计的正定对角矩阵。考虑 Lyapunov 函数 $V_{p1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{z}_p$, 对其求导得 $\dot{V}_{p1} = \boldsymbol{z}_p^T\dot{\boldsymbol{z}}_p = \boldsymbol{z}_p^T(\boldsymbol{s}_p - \boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p) = -\boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{s}_p$ 。

选取 Lyapunov 函数 $V_{p2} = V_{p1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_p^T\boldsymbol{s}_p$, 可以得到

$$\dot{V}_{p2} = -\boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{s}_p^T\left(\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{A}_{p1}\dot{\boldsymbol{z}}_p + \frac{1}{m}\boldsymbol{F} - g\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{d}_p - \ddot{\boldsymbol{p}}_d\right). \quad (7)$$

根据假设 1 和 Young 不等式,由式(7)可以得到

$$\dot{V}_{p2} \leq -\boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{s}_p^T\left[\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{A}_{p1}(-\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{s}_p) + \frac{1}{m}\boldsymbol{F} - g\boldsymbol{e}_3 + \frac{c_1}{4}\boldsymbol{s}_p - \ddot{\boldsymbol{p}}_d\right] + \frac{1}{c_1}|\bar{d}|^2, \quad (8)$$

其中 c_1 为待设计正常数。选取位置子系统标称控制器

$$\boldsymbol{F}_{\text{norm}} = m\left[-\boldsymbol{z}_p - \boldsymbol{A}_{p1}(-\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p + \boldsymbol{s}_p) + g\boldsymbol{e}_3 - \frac{c_1}{4}\boldsymbol{s}_p + \ddot{\boldsymbol{p}}_d - \boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{s}_p - \tanh\left(\frac{\boldsymbol{s}_p}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\right], \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{A}_{p2} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为待设计正定对角矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ 为常数。将控制器(9)代入式(8),结合引理 2,得到

$$\dot{V}_{p2} \leq -\boldsymbol{z}_p^T\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{z}_p - \boldsymbol{s}_p^T\boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{s}_p - |\boldsymbol{s}_p| + \mu\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{c_1}|\bar{d}|^2 \leq -2\min\{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}_{p1}), \lambda_{\min}(\boldsymbol{A}_{p2})\}V_{p2} + \mu\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{c_1}|\bar{d}|^2, \quad (10)$$

其中, $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}_{p1})$ 和 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}_{p2})$ 分别表示矩阵 \boldsymbol{A}_{p1} 和 \boldsymbol{A}_{p2} 的最小特征值。

2.2 姿态子系统控制器设计

根据模型(1),得姿态子系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}_\eta. \end{cases} \quad (11)$$

定义误差变量和滑模函数

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d, \\ \boldsymbol{s}_\eta = \boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \dot{\boldsymbol{z}}_\eta, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\boldsymbol{A}_{\eta1} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为待设计的正定对角矩阵。选取 Lyapunov 函数 $V_{\eta1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_\eta^T\boldsymbol{z}_\eta$, 对其求导得 $\dot{V}_{\eta1} = \boldsymbol{z}_\eta^T\dot{\boldsymbol{z}}_\eta = \boldsymbol{z}_\eta^T(\boldsymbol{s}_\eta - \boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta) = -\boldsymbol{z}_\eta^T\boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{z}_\eta^T\boldsymbol{s}_\eta$ 。

取 Lyapunov 函数 $V_{\eta2} = V_{\eta1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_\eta^T\boldsymbol{s}_\eta$, 求导可得

$$\dot{V}_{\eta2} = -\boldsymbol{z}_\eta^T\boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{s}_\eta^T(\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{A}_{\eta1}\dot{\boldsymbol{z}}_\eta - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}_\eta - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d). \quad (13)$$

根据假设 1 以及 Young 不等式,那么式(13)变为

$$\dot{V}_{\eta2} \leq -\boldsymbol{z}_\eta^T\boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{s}_\eta^T\left[\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{J}^{-1}(-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}) + \frac{c_2}{4}\boldsymbol{s}_\eta - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d + \boldsymbol{A}_{\eta1}(-\boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{s}_\eta)\right] + \frac{1}{c_2}|\bar{d}|^2, \quad (14)$$

其中 c_2 为待设计正常数。最后,选取姿态控制扭矩

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}\left[-\boldsymbol{z}_\eta - \frac{c_2}{4}\boldsymbol{s}_\eta + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \boldsymbol{A}_{\eta1}(-\boldsymbol{A}_{\eta1}\boldsymbol{z}_\eta + \boldsymbol{s}_\eta) - \boldsymbol{A}_{\eta2}\boldsymbol{s}_\eta - \tanh\left(\frac{\boldsymbol{s}_\eta}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\right] + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (15)$$

其中, $\mathbf{A}_{\eta_2} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为待设计的正定对角矩阵。将式(15)代入式(14),并结合引理2,可得

$$\dot{V}_{\eta_2} \leq -\mathbf{z}_{\eta}^T \mathbf{A}_{\eta_1} \mathbf{z}_{\eta} - \mathbf{s}_{\eta}^T \mathbf{A}_{\eta_2} \mathbf{s}_{\eta} - |\mathbf{s}_{\eta}| + \mu \varepsilon + \frac{1}{c_2} |\bar{d}|^2 \leq -2 \min\{\lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_2})\} V_{\eta_2} + \mu \varepsilon + \frac{1}{c_2} |\bar{d}|^2, \quad (16)$$

其中, $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_2})$ 表示矩阵 \mathbf{A}_{η_1} 和 \mathbf{A}_{η_2} 的最小特征值。

2.3 稳定性分析

定理1 对于满足假设1的四旋翼无人机模型(1),由式(6)、(12)以及控制器(9)、(15),则闭环误差系统满足性能:(i) 闭环误差系统实用稳定;(ii) 通过调节参数,跟踪误差 \mathbf{z}_p 和 \mathbf{z}_{η} 可收敛到任意小邻域内。

证明 选取 Lyapunov 函数 $V = V_{p_2} + V_{\eta_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_p^T \mathbf{z}_p + \mathbf{s}_p^T \mathbf{s}_p + \mathbf{z}_{\eta}^T \mathbf{z}_{\eta} + \mathbf{s}_{\eta}^T \mathbf{s}_{\eta})$, 根据式(10)、(16)可得

$$\dot{V} \leq -cV + b, \quad (17)$$

其中, $c = 2 \min\{\lambda_{\min}(\mathbf{A}_{p_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{p_2}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_2})\}$, $b = 2\mu\varepsilon + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) |\bar{d}|^2$ 。根据文献[19]

可知,闭环误差系统是实用稳定的。

对不等式(17)两边同时在 $[0, t]$ 上积分,得

$$V(t) \leq V(0)e^{-ct} + \frac{b}{c}(1 - e^{-ct}) \leq V(0) + \frac{b}{c}, \quad (18)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,由 V 的定义和式(18)知, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_p| \leq \sqrt{\frac{2b}{c}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_{\eta}| \leq \sqrt{\frac{2b}{c}}$ 。由 c, b 的定义可知,通过调整参数 $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_{p_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{p_2}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_1}), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_{\eta_2}), c_1, c_2$ 和 ε , 可使收敛范围充分小,即跟踪误差 \mathbf{z}_p 和 \mathbf{z}_{η} 可收敛到任意小邻域内。

3 四旋翼无人机避障控制器设计

本节对标称跟踪控制器进行调整,使四旋翼无人机能避开障碍物。通常情况下,四旋翼的姿态控制器对无人机避障轨迹的影响很小,因此本文将重点聚焦在无人机的位置子系统。为方便控制器设计,假设无人机能实时感知障碍物的精确位置,且其初始状态不在障碍物相邻范围内。将障碍物所占空间视为球形区域,障碍物所占空间的集合定义如下:

$$O_0^c = \{\mathbf{p}^c = [x^c, y^c, z^c]^T \in \mathbf{R}^3 : |\mathbf{p}^c - \mathbf{p}_0^c|^2 - r_0^2 \leq 0\},$$

其中, \mathbf{p}^c 为障碍物所占空间位置坐标, $\mathbf{p}_0^c \in \mathbf{R}^3$ 为障碍物中心, r_0 为障碍物半径。以距离刻画安全集为

$$C_0 = \{\mathbf{p} = [x, y, z]^T \in \mathbf{R}^3 : |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c|^2 - r_0^2 \geq 0\}.$$

由于四旋翼无人机的相对阶为2,引入无人机的速度项确保控制障碍函数的一阶导数显含四旋翼无人机位置子系统控制器。构造控制障碍函数为

$$h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = h_0(\mathbf{p}) - \mathbf{v}^T \mathbf{v} = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c|^2 - r_0^2 - \delta_0^2 - \mathbf{v}^T \mathbf{v}, \quad (19)$$

其中, δ_0 为可调节参数,通过调节 δ_0 使无人机与障碍物之间保持足够安全的距离。

针对函数 $h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ 定义集合 $C_1 = \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 : h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \geq 0\}$ 。根据定义4及引理1,取拓展 K 类函数 $\alpha(h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v})) = \gamma h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, 其中 $\gamma > 0$ 为待设计常数。定义集合 $K_{\text{Ozcbf}} = \{\mathbf{F} \in \mathbf{R}^3 : \dot{h}_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \gamma h_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \geq 0\}$, 则任意 Lipschitz 连续控制器 $\mathbf{F} \in K_{\text{Ozcbf}}$, 都使得集合 C_1 前向不变。又显然 $C_1 \subset C_0 \times \mathbf{R}^3$, 因此若系统初值 $(\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_0)$ 在 C_1 中, 则状态 \mathbf{p} 始终保持在安全集 C_0 中。

对式(19)求导,并结合 Young 不等式可得

$$\dot{h}_1(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = 2\mathbf{v}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c) - 2\mathbf{v}^T \dot{\mathbf{v}} \geq 2\mathbf{v}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c) - 2\mathbf{v}^T \left(\frac{1}{m} \mathbf{F} - g\mathbf{e}_3 \right) - c_3 |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{c_3} |\bar{d}|^2, \quad (20)$$

其中, $c_3 > 0$ 为待设计参数。

注2 若四旋翼无人机的速度 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 代入式(20) 并给定合适的常数 γ , 可得 $h_1 \geq -\gamma h_1$, 结合引理1, 此时无人机满足安全性能, 由式(9) 给出的标称跟踪控制器 \mathbf{F}_{norm} , 可使得四旋翼无人机安全, 不需对其进行修正, 此时 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{norm}}$ 。因此, 下面仅讨论四旋翼无人机速度 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 的情况。

根据式(9)和式(20), 给出二次规划如下:

$$\begin{cases} \mathbf{F}^* = \arg \min_{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{norm}}\|^2, \\ \text{s.t. } 2\mathbf{v}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c) - 2\mathbf{v}^T\left(\frac{1}{m}\mathbf{F} - g\mathbf{e}_3\right) - c_3 \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{c_3} |\bar{d}|^2 \geq -\gamma h_1. \end{cases} \quad (21)$$

定理2 基于二次规划(21), 设计避障跟踪控制器

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{norm}} + \mathbf{F}_{\text{safe}}, \quad (22)$$

使得模型(1)能够完成避障, 并尽可能跟踪到参考信号, 其中 \mathbf{F}_{norm} 是由式(9) 给出的跟踪控制器, \mathbf{F}_{safe} 为安全修正项, 表示为

$$\mathbf{F}_{\text{safe}} = \begin{cases} \frac{m\mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|^2} \Psi, & \Psi < 0, \\ \mathbf{0}, & \Psi \geq 0, \end{cases}$$

其中,

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{F}_{\text{norm}}) = 2\mathbf{v}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c) - 2\mathbf{v}^T\left(\frac{1}{m}\mathbf{F}_{\text{norm}} - g\mathbf{e}_3\right) - c_3 \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{c_3} |\bar{d}|^2 + \gamma h_1。$$

证明 引入拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{norm}}\|^2 - \lambda \left[2\mathbf{v}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0^c) - 2\mathbf{v}^T\left(\frac{1}{m}\mathbf{F} - g\mathbf{e}_3\right) - c_3 \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{c_3} |\bar{d}|^2 + \gamma h_1 \right], \quad (23)$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数。将式(22) 与 $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{F}_{\text{norm}})$ 代入式(23) 得, $L = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}_{\text{safe}}\|^2 - \lambda \left(\Psi - \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} \right)$, 基于KKT条件, 则有

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{F}_{\text{safe}}} = \mathbf{F}_{\text{safe}} + \frac{2\lambda}{m} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

$$\lambda \left[\Psi - \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} \right] = 0. \quad (25)$$

情形1: 如果 $\Psi - \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} = 0, \lambda > 0$, 将式(24) 两侧同时左乘 $\frac{2}{m} \mathbf{v}^T$, 整理可得 $\frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} = -\frac{4\lambda}{m^2} \mathbf{v}^T \mathbf{v} < 0$,

此时 $\Psi = \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} < 0$, 可解出 $\mathbf{F}_{\text{safe}} = \frac{m\mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|^2} \Psi$ 。

情形2: $\Psi - \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} > 0, \lambda = 0$, 由式(24) 知 $\mathbf{F}_{\text{safe}} = \mathbf{0}$, 此时 $\Psi > \frac{2}{m} \mathbf{v}^T \mathbf{F}_{\text{safe}} = 0$ 。

综合以上设计过程, 给出本文所提控制策略的结构图, 见图2。

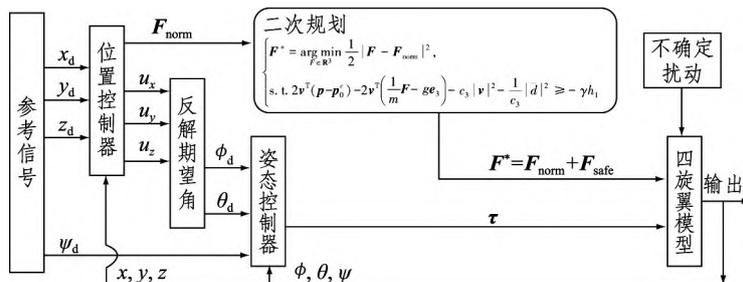


图2 四旋翼无人机的控制结构图

Fig.2 Control structure diagram of a quadrotor UAV

4 仿真结果

无人机模型(1)的变量分别取为： $m = 1$ ， $\mathbf{J} = \text{diag}(0.02, 0.08, 0.07)$ ， $d_x = 0.2\sin(0.1\pi t)$ ， $d_y = 0.2\cos(0.1\pi t)$ ， $d_z = 0.2\sin(0.1\pi t)$ ， $d_\phi = 0.2\sin(0.1\pi t) + 0.1$ ， $d_\theta = 0.2\cos(0.1\pi t) + 0.1$ ， $d_\psi = 0.2\sin(0.1\pi t) + 0.2$ ；参考轨迹为 $x_d = 2\cos t + 1$ ， $y_d = 2\sin t + 1$ ， $z_d = 0.2t + 0.1$ ， $\psi_d = \sin(\cos 0.5t)$ 。控制器参数分别取为 $\mathbf{A}_{p1} = \text{diag}(1, 3, 7)$ ， $\mathbf{A}_{p2} = \text{diag}(2, 4, 5)$ ， $\mathbf{A}_{\eta1} = \text{diag}(10, 15, 7)$ ， $\mathbf{A}_{\eta2} = \text{diag}(15, 10, 7)$ ， $c_1 = 10$ ， $c_2 = 5$ ， $c_3 = 5$ ， $\gamma = 5$ ，双曲正切函数中参数 $\varepsilon = 0.1$ 。三维空间中障碍物中心的位置为 $\mathbf{p}_0^c = [2, 3, 4]^T$ ，半径 $r_0 = 0.5$ ，可调节参数 $\delta_0 = 0$ 。

仿真过程中取系统初始位姿 $[x_0, y_0, z_0, \phi_0, \theta_0, \psi_0]^T = [3, 1, 0, -0.5, 0.6, 0.7]^T$ ，初始线速度 $[v_x, v_y, v_z]^T = [0, 0, 0]^T$ ，初始欧拉角速度 $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = [1, 1, 0]^T$ ，仿真结果如图 3~5 所示。从图 3 中可看出：无人机在开始未遭遇障碍物时，跟踪误差能够收敛到足够小的邻域；飞行约 20 s 时，由于遭遇障碍物，无人机迅速通过调整控制器输出改变飞行轨迹，此时跟踪误差出现较大跳跃；完成避障后，无人机迅速跟踪参考信号，跟踪误差再次收敛于 0。由图 4 可以看到，当遭遇障碍物时，控制器输出可以被迅速调节，使无人机飞行路径改变；图 5 表明无人机能够很好地跟踪参考信号。因此，综合仿真结果可以得到：当无人机没有遭遇障碍物时，标称跟踪控制器可以使无人机有效跟踪到参考信号；当无人机遭遇障碍物时，控制器迅速调节输出，改变飞行轨迹完成避障，同时在确保自身安全的情况下再次跟踪参考信号。

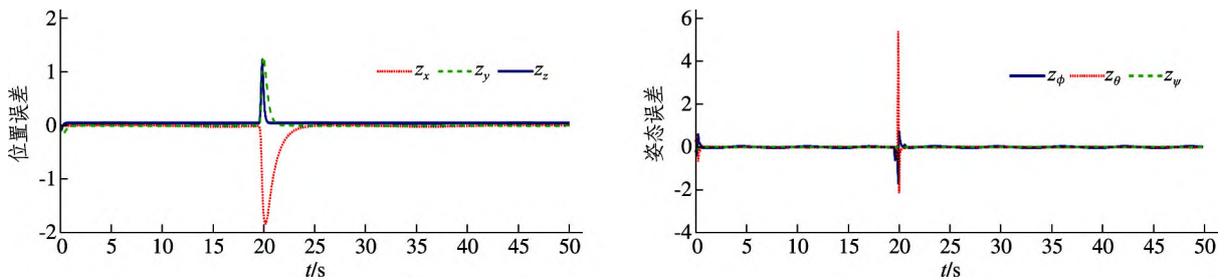


图 3 避障跟踪误差

Fig.3 Obstacle avoidance tracking errors

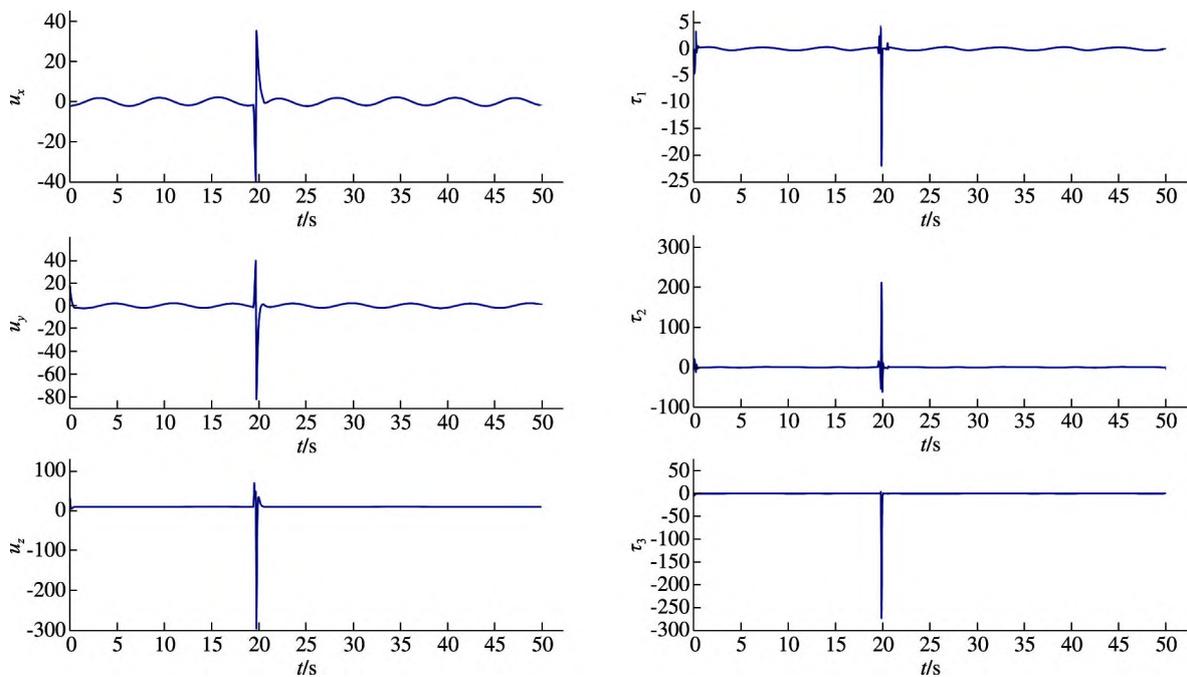


图 4 避障控制器输入

Fig.4 Obstacle avoidance controller inputs

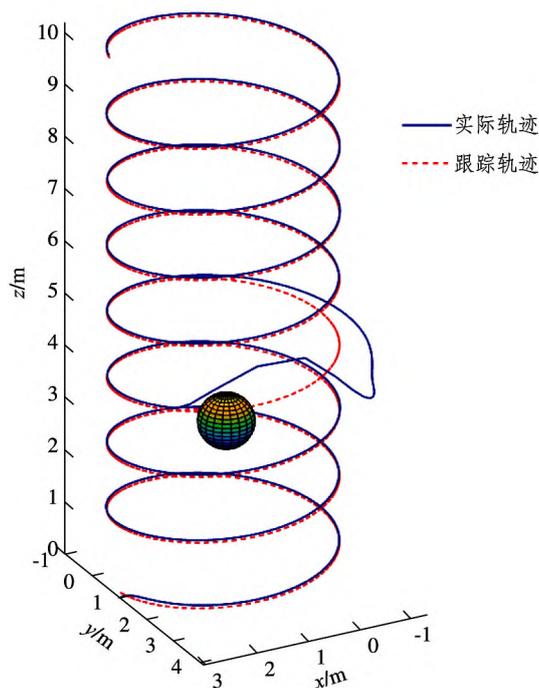


图5 三维空间避障跟踪轨迹

Fig.5 Obstacle avoidance tracking trajectories in three-dimensional space

5 结论

本文基于安全约束与二次规划方法,研究了不确定扰动下四旋翼无人机的避障与跟踪控制。运用 Backstepping 控制方法,将控制障碍函数与二次规划相结合,所设计的控制器能够使四旋翼无人机有效避开跟踪路径上的障碍物,跟踪给定的参考信号。

参考文献:

- [1] GHAZBI S N, AGHLI Y, ALIMOHAMMADI M, et al. Quadrotors unmanned aerial vehicles: a review[J]. International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems, 2016, 9(1): 309-333.
- [2] ZHENG Z, SU X J, JIANG T, et al. Robust dynamic geofencing attitude control for quadrotor systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(2): 1861-1869.
- [3] CHEN A J, SUN M J, WANG Z H, et al. Attitude trajectory tracking of quadrotor UAV using super-twisting observer-based adaptive controller[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2021, 235(10): 1146-1157.
- [4] KOKSAL N, AN H, FIDAN B. Backstepping-based adaptive control of a quadrotor UAV with guaranteed tracking performance[J]. ISA Transactions, 2020, 105: 98-110.
- [5] MAHFOUZ M, TAIOMOUR A, ASHRY M M, et al. PID vs. backstepping control for cooperative quadrotors unmanned aerial vehicles[J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, 610(1): 012057.
- [6] SHAO X Y, SUN G, YAO W, et al. Adaptive sliding mode control for quadrotor UAVs with input saturation[J]. IEEE Transactions on Mechatronics, 2022, 27(3): 1498-1509.
- [7] BAEK J, KANG M. A synthesized sliding-mode control for attitude trajectory tracking of quadrotor UAV systems[J]. ASME Transactions on Mechatronics, 2023, 28(4): 2189-2199.
- [8] DAS A, LEWIS F, SUBBARAO K. Backstepping approach for controlling a quadrotor using Lagrange form dynamics[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2009, 56: 127-151.

- [9] GUO K, ZHANG W, ZHU Y, et al. Safety control for quadrotor UAV against ground effect and blade damage[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(12): 13373–13383.
- [10] CAO N, LYNCH A F. Inner-outer loop control for quadrotor UAVs with input and state constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 24(5): 1797–1804.
- [11] KHAN M, ZAFAR M, CHATTERJEE A. Barrier functions in cascaded controller: safe quadrotor control[C]// American Control Conference, 2020: 1737–1742.
- [12] AMES A D, COOGAN S, EGERSTEDT M, et al. Control barrier functions: theory and applications[C]// 18th European Control Conference, 2019: 3420–3431.
- [13] 陈杰, 吕梓亮, 黄鑫源, 等. 非线性系统的安全分析与控制: 障碍函数方法[J]. 自动化学报, 2023, 49(3): 567–579.
- [14] 孙谷昊, 曾庆双, 蔡中泽. 四旋翼无人机安全轨迹跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2023, 40(7): 1261–1269.
- [15] AMES A D, XU X, GRIZZLE J W, et al. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 3861–3876.
- [16] LEE S J, KIM S, JOHANSSON K H, et al. Robust acceleration control of a hexarotor UAV with a disturbance observer[C]// IEEE 55th Conference on Decision and Control, 2016: 4166–4171.
- [17] KOLATHAYA S, AMES A D. Input-to-state safety with control barrier functions[J]. IEEE Control Systems Letters, 2018, 3(1): 108–113.
- [18] CHEN M, ZHOU Y, GUO W W. Robust tracking control for uncertain MIMO nonlinear systems with input saturation using RWNDO[J]. Neurocomputing, 2014, 144: 436–447.
- [19] 李若南. 非线性正系统的实用稳定性[D]. 济南: 济南大学, 2021.

Obstacle Avoidance and Tracking Control for a Quadrotor UAV with Unknown Bounded Disturbance

DONG Hexiang, ZHANG Hui

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: The obstacle avoidance and tracking control problem for a quadrotor UAV system with uncertain disturbances is investigated in this paper. Firstly, the sliding mode backstepping method was employed to design a nominal tracking controller to accomplish the tracking task of the quadrotor UAV, and by combining with hyperbolic tangent functions, system chattering phenomenon was decreased. Secondly, a control barrier function was constructed to establish a set of safety controllers, which can ensure that controllers within the set can drive the system away from obstacles. Finally, the constraints of the control barrier function were combined with quadratic programming to seek a safety tracking controller with the minimum distance from the nominal tracking controller. The obtained safety tracking controller is capable of achieving obstacle avoidance while enabling the quadrotor to track the reference signal as closely as possible. The results of the simulation demonstrate that the UAV can effectively avoid the obstacle, quickly track reference signals, and reduce tracking errors to a sufficiently small range, which verify the effectiveness of the designed controller.

Keywords: quadrotor UAV; control barrier function; quadratic program; obstacle avoidance; tracking control

(责任编辑 顾建忠)