

捕食者—食饵模型的入侵速度

张 琪,王琳琳 樊永红

(鲁东大学 数学与统计科学学院 山东 烟台 264039)

摘要: 研究了两个食饵和一个捕食者的捕食者—食饵模型,通过应用最大值原理和比较原理,削弱已有问题的条件,得到模型的入侵速度,推广和改进了相应结果.

关键词: 捕食者; 食饵; 入侵速度

中图分类号: O175.1 文献标志码: A 文章编号: 1673-8020(2020)03-0206-05

种群模型在生态学中具有重要地位,不同种群之间相互影响,不可分割,而捕食关系是它们的基本关系之一,因此对捕食关系的研究很有必要.意大利数学家 Volterra 提出了解释捕鱼数量变换规律的模型,美国人口统计学家和数学家 Lotka 提出类似的模型,这就是经典的 Lotka-Volterra 模型,对这类模型已经有了许多研究,如文献[1—3].三个种群之间的关系比两个种群之间的关系更复杂,本文主要研究一个捕食者和两个食饵的情况.

关于三种生态系统之间的相互作用已经有了许多研究^[4—5].近年来,对于捕食者在捕食时入侵过程的研究引起学者们的关注,侵入过程是由对行波解的研究和入侵速度来表征的,文献[6]对行波解进行研究,考虑除两种猎物之外存在其它资源的情形,文献[7—9]研究捕食者—食饵模型中单个猎物的入侵传播速度,文献[10]研究除两种猎物外没有其它资源的情况下捕食者的扩散速度.本文在文献[10]的基础上,将所需条件减弱,得到捕食者的入侵速度.

考虑如下捕食者—食饵模型:

$$u_t = d_1 u_{xx} + r_1 u(1 - u - kv - a_1 w) \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$v_t = d_2 v_{xx} + r_2 v(1 - v - hu - a_2 w) \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (2)$$

$$w_t = d_3 w_{xx} + r_3 w(-1 + a_1 u + a_2 v - w) \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}$ 中的有界开集,且 u, v 满足

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0,$$

$d_i, r_i, i = 1, 2, 3$, 及 a_1, a_2, h, k 是正常数, $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 表示食饵种群的密度, $w(x, t)$ 表示捕食者种群的密度; d_i 表示 u, v, w 的扩散系数, r_1 和 r_2 分别表示 u 和 v 的内禀增长率, r_3 表示 w 的死亡率; $r_1 a_1$ 和 $r_2 a_2$ 表示捕食率, $r_3 a_1$ 和 $r_3 a_2$ 表示转换率, h 和 k 表示两个食饵种群的种间竞争系数.在没有捕食者的情况下,认为食饵之间是弱竞争的,有 $h < 1, k < 1$, 且平衡点为 $(u^*, v^*, w^*) = (\frac{1-k}{1-hk}, \frac{1-h}{1-hk}, 0)$.

1 预备知识

考虑弱耦合的反应扩散方程的初边值问题

收稿日期: 2020-04-02; 修回日期: 2020-05-14

基金项目: 国家自然科学基金(112012313); 山东省自然科学基金(ZR2015AM026); 山东省高校科技发展计划(J15LJ07)

第一作者简介: 张琪(1996—),女,山东博兴人,硕士研究生,研究方向为微分方程及其应用. E-mail: 2228263726@qq.com

通信作者简介: 王琳琳(1976—),女,山东博兴人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为非线性分析及微分方程. E-mail: wangll_1994@sina.com

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + L_i u_i = f_i(x, t, \mu_1, \dots, \mu_m), & x \in \Omega, t \in (0, T], \\ B_i u_i = g_i(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (0, T], \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

其中: Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开域, L_i 是 Ω 上的一致抛物算子.

定义 m 个一致抛物算子

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^n a_{kj}^{(i)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k^{(i)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

和 m 阶矩阵函数

$$H(x, t) = (h_{ij}(x, t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

对 $i = 1, 2, \dots, m$, 不等式组 $L_i u_i + \sum_{j=1}^m h_{ij} u_j \leq 0$ (≥ 0) 的最大值原理为:

引理 1^[11] 设 $u_j(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $j = 1, 2, \dots, m$. 若

- 1) $h_{ij} \leq 0$, $j \neq i$, $j = 1, 2, \dots, m$;
- 2) $L_i u_i + \sum_{j=1}^m h_{ij} u_j < 0$ (> 0) $(x, t) \in Q_T$, $i = 1, 2, \dots, m$;
- 3) 当 $x \in \bar{\Omega}$ 时, $u_i(x, 0) < 0$ (> 0);
- 4) $u_i(x, t)|_{\partial\Omega \times (0, T]} < 0$ (> 0) 或 $[\frac{\partial u_i}{\partial n} + b_i(x) u_i]_{\partial\Omega \times (0, T]} \leq 0$ (≥ 0), $i = 1, 2, \dots, m$,

则有

$$u_i(x, t) < 0 \text{ (} > 0 \text{)} \quad (x, t) \in Q_T.$$

2 捕食者—食饵模型的入侵速度

系统 (1) ~ (3) 的初值条件为

$$u(x, 0) = u^*, \quad v(x, 0) = v^*, \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

其中, w_0 是一个非负连续函数且具有一个非空紧支集. 当条件 (5) 和 (6) 成立时, $s^* > 0$ 称为捕食者 w 的入侵速度.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|x| < ct} w(x, t) \right\} = 0, \quad \forall c > s^*, \quad (5)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{|x| < ct} w(x, t) \right\} > 0, \quad \forall c \in (0, s^*). \quad (6)$$

假设

$$h, k \in (0, 1), \quad a_1 = a_2 = a. \quad (7)$$

令 $\alpha = a(u^* + v^*) - 1$, 当 $u^* + v^* = \frac{2-h-k}{1-hk} > \frac{1}{a}$ 时, 有 $\alpha > 0$. 这里 $\alpha > 0$ 表示在 $(u^*, v^*, 0)$ 条件下系统 (3) 的线性稳定性. 假设

$$\beta_1 = 1 - k - a\alpha > 0, \quad \beta_2 = 1 - h - a\alpha > 0. \quad (8)$$

若式 (8) 成立, 则可以得到

$$\beta_1 < 1 - k < u^*, \quad \beta_2 < 1 - h < v^*. \quad (9)$$

本文假设

$$d_1 = d_2 = d. \quad (10)$$

定理 1 若系统 (1) ~ (3) 的初值条件 (4) 和条件 (7) ~ (10) 成立, 且在 Ω 中满足 $w_0 \leq \alpha$, 则 $s^* = 2\sqrt{d_3 r_3 \alpha}$ 是 w 的入侵速度.

证明 设 (u, v, w) 是系统 (1) ~ (3) 满足初值条件 (4) 的解, 由强最大值原理知, 当 $t > 0$ 时, 有

$w > 0$. 于是由式(1)和(2)可得

$$\begin{cases} u_t \leq d_1 u_{xx} + r_1 u(1 - u - kv) & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t \leq d_2 v_{xx} + r_2 v(1 - hu - v) & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$(u(x, t), v(x, t)) \in \Sigma, \forall (x, t) \in [0, \infty), \quad (12)$$

且 $\Sigma = \{(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] : 1 - u - kv \geq 0, 1 - hu - v \geq 0\}$.

事实上, 令 $\varphi = 1 - u - kv$, $\xi = 1 - hu - v$, 得

$$u = \frac{\varphi - k\xi + k - 1}{hk - 1}, \quad v = \frac{\xi - h\varphi + h - 1}{hk - 1},$$

那么式(11)变形为

$$\begin{cases} \varphi_t - k\xi_t \geq d_1 \varphi_{xx} - d_1 k\xi_{xx} + r_1 \varphi(\varphi - k\xi + k - 1) & x \in \Omega, t > 0, \\ \xi_t - h\varphi_t \geq d_2 \xi_{xx} - d_2 h\varphi_{xx} + r_2 \xi(\xi - h\varphi + h - 1) & x \in \Omega, t > 0. \end{cases}$$

由式(10)和上式可得

$$\varphi_t \geq d\varphi_{xx} + \frac{r_1 \varphi(\varphi - k\xi + k - 1)}{1 - hk} + \frac{r_2 k\xi(\xi - h\varphi + h - 1)}{1 - hk}, \quad (13)$$

$$\xi_t \geq d\xi_{xx} + \frac{r_2 \xi(\xi - h\varphi + h - 1)}{1 - hk} + \frac{r_1 h\varphi(\varphi - k\xi - k + 1)}{1 - hk}, \quad (14)$$

根据式(13)和(14), 得到

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{r_1(\varphi - k\xi - k + 1)}{1 - hk}, \quad h_{12} = \frac{r_2 k(\xi - h\varphi + h - 1)}{1 - hk}, \\ h_{21} &= \frac{r_1 h(\varphi - k\xi - k + 1)}{1 - hk}, \quad h_{22} = \frac{r_2(\xi - h\varphi + h - 1)}{1 - hk}. \end{aligned}$$

令 $\psi_i = \frac{\partial}{\partial t} - d \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, 易得 $\xi - h\varphi + h - 1 < 0$, $\varphi - k\xi + k - 1 < 0$, 又因为 $1 - hk > 0$, 可得 $h_{ij} \leq 0$, $j \neq i$, $j = 1, 2$. 因此, 引理1中的条件1) 成立.

易知 $\psi_i \varphi + \sum_{j=1}^2 h_{ij} \varphi \geq 0$, 所以引理1中的条件2) 得证. 当 $x \in \bar{\Omega}$ 时, 有 $\varphi(x, 0) \geq 0$, 引理1中的条件3) 成立.

因为 u, v 在 Ω 的边界上满足诺依曼边界条件, 故 φ, ξ 在 Ω 的边界上也满足诺依曼边界条件, 因此引理1中的条件4) 成立.

根据引理1, 得 $\varphi(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$. 同理可证 $\xi(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$. 因此, 式(12)得证.

对任意 $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$, 有 $-1 + au(x, t) + av(x, t) \leq \alpha$ 成立. 因此, w 满足不等式

$$w_t \leq d_3 w_{xx} + r_3 w(\alpha - w), \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (15)$$

若 Z 是方程

$$\begin{cases} Z_t = d_3 Z_{xx} + r_3 Z(\alpha - Z) & x \in \Omega, t > 0, \\ Z(x, 0) = w_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (16)$$

的解, 由比较原理可得 $w \leq Z$. 对任意 $c > s^*$, 由文献[12]得到

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|x| > ct} w(x, t) \right\} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|x| > ct} Z(x, t) \right\} = 0.$$

因此, 式(5)得证. 下面证明式(6)成立.

由最大值原理可得, 在 Ω 中 $w \leq \alpha$, 由系统(1)和式(12)可得 u 满足

$$\begin{cases} u_t \geq du_{xx} + r_1 u(\beta_1 - u) & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u^* & x \in \Omega. \end{cases}$$

对任意 $x \in \Omega, t > 0$, 由式(9) 和最大值原理, 得 $v \geq \beta_1 > 0$. 同理可得, 对任意 $x \in \Omega, t > 0$, 有 $v \geq \beta_2 > 0$. 由式(12) 可知

$$u_t \geq du_{xx} + r_1\beta_1(1 - u - kv) - r_1a_1w, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (17)$$

$$v_t \geq dv_{xx} + r_2\beta_2(1 - hu - v) - r_2a_2w, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (18)$$

定义 $\gamma_1 = r_1a, \gamma_2 = r_2a$, 则式(17) 和(18) 可化为

$$u_t + v_t \geq d(u_{xx} + v_{xx}) + r_1\beta_1(1 - u - kv) + r_2\beta_2(1 - hu - v) - (\gamma_1 + \gamma_2)w, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (19)$$

令 $W = a(u^* + v^* - u - v)$, 由式(19) 得

$$W_t \leq dW_{xx} - a(r_1\beta_1 + r_2\beta_2h)(u^* - u) - a(r_1\beta_1k + r_2\beta_2)(v^* - v) + a(\gamma_1 + \gamma_2)w, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (20)$$

设存在 $\sigma > 0$, 使得 $a(r_1\beta_1 + r_2\beta_2h)(u^* - u) + a(r_1\beta_1k + r_2\beta_2)(v^* - v) \geq \sigma W$, 则有

$$(r_1\beta_1 + r_2\beta_2h)(u^* - u) + (r_1\beta_1k + r_2\beta_2)(v^* - v) - \sigma(u^* + v^* - u - v) \geq 0. \quad (21)$$

由此, 可以得到

$$\begin{cases} \sigma \leq r_1\beta_1 + r_2\beta_2h, \\ \sigma \leq r_1\beta_1k + r_2\beta_2. \end{cases} \quad (22)$$

将式(21) 变形为

$$(\sigma - r_1\beta_1 - r_2\beta_2h)u + (\sigma - r_1\beta_1k - r_2\beta_2v) + [r_1\beta_1 + r_2\beta_2 - \sigma(u^* + v^*)] \geq 0,$$

因此, 需要

$$\begin{cases} \frac{\sigma(u^* + v^* - r_1\beta_1 - r_2\beta_2)}{\sigma - r_1\beta_1k - r_2\beta_2} \geq 1, \\ \frac{\sigma(u^* + v^* - r_1\beta_1 - r_2\beta_2)}{\sigma - r_1\beta_1 - r_2\beta_2h} \geq 1 \end{cases}$$

成立, 解该不等式组得

$$\sigma \leq \frac{r_1\beta_1(1 - k)}{u^* + v^* - 1}, \sigma \leq \frac{r_2\beta_2(1 - h)}{u^* + v^* - 1}. \quad (23)$$

由式(22) 和(23), 只需取 $\sigma = \min\left\{r_1\beta_1 + r_2\beta_2h, r_1\beta_1k + r_2\beta_2, \frac{r_1\beta_1(1 - k)}{u^* + v^* - 1}, \frac{r_2\beta_2(1 - h)}{u^* + v^* - 1}\right\}$, 则有

$$W_t \leq dW_{xx} - \sigma W + a(\gamma_1 + \gamma_2)w, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (24)$$

注意到, 当 $t = 0$ 时, 有 $u = u^*, v = v^*$. 因此, 如果 ϕ 是方程

$$\begin{cases} \phi_t = d\phi_{xx} - \sigma\phi + a(\gamma_1 + \gamma_2)w, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \phi(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \end{cases}$$

的解, 则有

$$\phi(x, t) = a(\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^t \left[e^{-\sigma(t-s)} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} w(y, s) dy \right] ds. \quad (25)$$

根据比较原理, 可得

$$W \leq \phi, \quad \forall x \in \Omega, t \geq 0. \quad (26)$$

对任意 $\varepsilon \in (0, s^*)$, 存在 $\delta \in (0, \alpha)$, 使得 $2\sqrt{d_3r_3(\alpha - \delta)} > s^* - \varepsilon$. 由文献[10] 知, 对此 δ , 存在 $M > 0$ 及 $\tau \gg 1$, 使得

$$\phi(x, t) \leq \delta + Mw(x, t), \quad \forall x \in \Omega, t \geq \tau. \quad (27)$$

结合式(26) 和(27), 得到 $a(u + v) \geq \alpha + 1 - \delta - Mw$, 于是由系统(3) 可得, w 满足

$$\begin{cases} w_t \geq d_3w_{xx} + r_3w[\alpha - \delta - (M + 1)w], \quad x \in \Omega, t \geq \tau, \\ w(x, \tau) > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

根据文献[7], 对任意 $c \in (s^* - \varepsilon, 2\sqrt{d_3r_3(\alpha - \delta)})$, 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{|x| < ct} w(x, t) \right\} \geq \frac{\alpha - \delta}{M + 1}.$$

由 ε 的任意性, 式(6)得证.

参考文献:

- [1] 张丽丽, 麻作军, 伏升茂. 带收获率的 Lotka-Volterra 捕食者—食饵交错扩散模型的 Turing 不稳定性[J]. 生物数学学报, 2018, 33(2): 244–256.
- [2] WANG C Y, ZHAO N, ZHOU Y Q et al. On a multi-delay Lotka-Volterra predator-prey model with feedback controls and prey diffusion[J]. Acta Mathematica Scientia(English Series), 2019, 2: 429–448.
- [3] 王丽莎, 赵建东. 被捕食者感染疾病的 Lotka-Volterra 捕食—被捕食模型[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2018, 34(1): 38–43.
- [4] FREEDMAN H I, WALTMAN P. Persistence in three interacting predator-prey populations[J]. Mathematical Biosciences, 1984, 68: 213–231.
- [5] CANTRELL R S, COSNER C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations[M]. USA: John Wiley & Sons, 2003.
- [6] HUANG Y L, LIN G. Traveling wave solutions in a diffusive system with two preys and one predator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 418: 163–184.
- [7] LIN G. Spreading speeds of a Lotka-Volterra predator-prey system: the role of the predator[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 2448–2461.
- [8] PAN S. Asymptotic spreading in a Lotka-Volterra predator-prey system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 407: 230–236.
- [9] PAN S. Invasion speed of a predator-prey system[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 74: 46–51.
- [10] WU C C. The spreading speed for a predator-prey model with one predator and two preys[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 91: 9–14.
- [11] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [12] ARONSON D G, WEINBERGER H F, ROUSSIER V. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1975, 446: 5–49.

Invasion Speed of a Predator-prey Model

ZHANG Qi, WANG Linlin, FAN Yonghong

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: A predator-prey model with two preys and one predator is considered. The invasion speed was obtained by applying the maximum principle and comparison principle. Moreover, the conditions of existing problems were weakened, and the corresponding results were generalized and improved.

Keywords: predator; prey; invasion speed

(责任编辑 顾建忠)