

基于 Razumikhin 方法的二阶随机非线性时变时滞系统的输出反馈控制

王 妍, 王天成

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264039)

摘要: 本文针对一类二阶的随机时变时滞非线性系统, 研究其输出反馈镇定问题. 基于 Razumikhin 方法和反推设计技术, 构造合适的观测器和 Lyapunov 函数, 所设计的控制器可以保证闭环系统的平衡点依概率全局渐近稳定. 通过 Razumikhin 方法设计的控制方案, 能够彻底去掉此类系统传统结果中对时滞导数的限制. 仿真示例验证了控制方案的有效性.

关键词: 时变时滞; 随机非线性系统; Razumikhin 定理; 输出反馈; 镇定

中图分类号: O231; TP273 文献标志码: A 文章编号: 1673-8020(2020) 03-0193-07

在分析和设计随机控制系统时, 由于时滞现象的出现使得问题变得困难^[1-3], 因此, 带有时滞现象的非线性系统的稳定性分析受到越来越多学者的关注^[4-5], 它不仅具有重要的理论价值, 还有较强的实际意义^[6-7]. 在带有时滞的随机时变非线性系统的研究中, 文献[8]首次为一般的随机非线性系统设计全局渐近稳定的输出反馈控制器. 通过变换系统的形式和施加不同的增长条件, 文献[9—12]研究了随机非线性系统的输出反馈镇定问题, 文献[13—14]通过选择适当的观测器和有效的增益函数, 为高阶次的随机非线性系统的输出反馈镇定问题设计了控制方案. 在文献[12]的基础上, 文献[15]增加时滞现象, 研究高阶随机时变时滞非线性系统的输出反馈镇定问题. 受文献[16—17]的启发, 本文利用 Razumikhin 方法, 参照文献[13]的观测器, 对文献[16]中二阶系统的输出反馈镇定问题进行进一步探索和研究. 与此同时, 去掉时滞导数的取值限制. 通过本文的输出反馈控制器设计, 得到系统的平衡点是依概率全局渐近稳定的, 且状态输出几乎处处调节到原点.

本文主要考虑如下—类随机时变时滞非线性系统:

$$\begin{cases} d\eta_1(t) = (\eta_2(t) + f_1(t, \eta_1(t), \eta_1(t-d(t)))) dt + g_1^T(t, \eta_1(t), \eta_1(t-d(t))) d\omega, \\ d\eta_2(t) = (v(t) + f_2(t, \bar{\eta}_2(t), \bar{\eta}_2(t-d(t)))) dt + g_2^T(t, \bar{\eta}_2(t), \bar{\eta}_2(t-d(t))) d\omega, \\ y(t) = \eta_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $v(t) \in \mathbf{R}$ 是系统的控制输入, $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))^T \in \mathbf{R}^2$ 是系统的状态, $y(t) \in \mathbf{R}$ 是系统的输出; $\bar{\eta}_2(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))^T, \bar{\eta}_2(t-d(t)) = (\eta_1(t-d(t)), \eta_2(t-d(t)))^T$; $d(t)$ 为时变状态时滞, 满足 $0 \leq d(t) \leq d$; ω 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 m 维标准 Wiener 过程, $\Omega, \mathcal{F}, P$ 分别为样本空间, σ -代数和概率测度; 函数 $f_i(\mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R})$ 和 $g_i(\mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^m)$ 关于 $(\bar{\eta}_i(t), \bar{\eta}_i(t-d(t)))$ 是局部 Lipschitz 的, 且 $f_i(0, 0) = 0, g_i(0, 0) = 0, i = 1, 2$.

1 预备知识

以下记号贯穿全文. $\text{tr}\{X\}$ 为方阵 X 的迹, $\|X\|$ 为欧几里得空间中向量 X 的 L_2 范数, $\mathcal{C}^i$ 为相应定义域上的 i 阶连续可微函数. 对于定义在 $[-d, \infty) \times \mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $V(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}([-d, \infty) \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}_+)$ 为关

收稿日期: 2019-12-27; 修回日期: 2020-04-30

基金项目: 国家自然科学基金(11371226)

第一作者简介: 王妍(1995—), 女, 山东济南人, 硕士研究生, 研究方向为随机控制. E-mail: 1746877391@qq.com

通信作者简介: 王天成(1967—), 男, 山东烟台人, 教授, 硕士研究生导师, 博士, 研究方向为随机非线性控制. E-mail: cumt_wtc@163.com

于分量 t 是 C^1 的且关于分量 x 是 C^2 的函数集合.

考虑如下随机时滞非线性系统:

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-d(t))) dt + g(t, x(t), x(t-d(t))) d\omega, \quad (2)$$

其中: 初始条件为 $\{x(\theta) : -d \leq \theta \leq 0\} = \zeta \in C_{F_0}^b([-d, 0]; \mathbf{R}^n)$, Borel 可测函数 $f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times C[-d, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $g: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times C[-d, 0] \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 且 $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = 0$.

定义 1^[16] 在系统 (2) 中, 对于 $V(t, x(t)) \in C^{1,2}$, 定义微分算子 L 为:

$$LV(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \text{tr} \{ g^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g \}.$$

引理 1^[16] 设存在正定且连续的 Lyapunov 函数 $V(t, x) \in C^{1,2}([-d, \infty) \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}_+)$, 正常数 μ, p , c_1, c_2 和 $q > 1$, 使得 $c_1 |x|^p \leq V(t, x) \leq c_2 |x|^p$, 并且对于 $t \geq 0$, 对任意 $-d \leq \theta \leq 0$, $x_t(\theta) = x(t + \theta) \in L_{F_t}^p([-d, 0]; \mathbf{R}^n)$, 当 $V(t + \theta, x_t(\theta)) < qV(t, x(t))$ 时, 有

$$ELV(t, x(t)) \leq -\mu EV(t, x(t)),$$

则对于所有 $\zeta \in C_{F_0}^b([-d, 0]; \mathbf{R}^n)$, 随机时滞系统 (2) 的平衡点 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的 (GAS). 这里 $L_{F_t}^p([-d, 0]; \mathbf{R}^n)$ 定义为 F_t 可测随机变量 $x_t(\theta)$ 的集合, 且 $\sup_{-d \leq \theta \leq 0} E|x_t(\theta)|^p < \infty$.

引理 2^[15] 对任意的 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 且 $p \geq 1$ 是一个常数, 如下不等式成立:

$$|x + y|^p \leq 2^{p-1} |x|^p + |y|^p.$$

引理 3^[16] 设 x, y 为常数, $m, n > 0$, 则对于任意正常数 c , 如下不等式成立:

$$x^m y^n \leq c |x|^{m+n} + \frac{n}{m+n} \left(\frac{m}{c(m+n)} \right)^{\frac{m}{n}} |y|^{m+n}.$$

2 控制器设计

假设系统 (1) 满足:

假设 1 存在 $a_i > 0 (i = 1, 2)$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned} |f_i(t, \bar{\eta}_i(t), \bar{\eta}_i(t-d(t)))| &\leq a_1 \left(\sum_{k=1}^i |\eta_k(t)| + \sum_{k=1}^i |\eta_k(t-d(t))| \right), \\ |g_i(t, \bar{\eta}_i(t), \bar{\eta}_i(t-d(t)))| &\leq a_2 \left(\sum_{k=1}^i |\eta_k(t)| + \sum_{k=1}^i |\eta_k(t-d(t))| \right). \end{aligned}$$

首先, 引入一组坐标变换:

$$\eta_1(t) = x_1(t), \quad \eta_2(t) = Nx_2(t), \quad \rho(t) = k_0 N^2 u(t), \quad (3)$$

则系统 (1) 可以表示为:

$$\begin{cases} dx_1(t) = (Nx_2(t) + f_1(t, x_1(t), x_1(t-d(t)))) dt + g_1^T(t, x_1(t), x_1(t-d(t))) d\omega, \\ dx_2(t) = (Nk_0 u(t) + \bar{f}_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{x}_2(t-d(t)))) dt + \bar{g}_2^T(t, \bar{x}_2(t), \bar{x}_2(t-d(t))) d\omega, \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中, $N \geq 1, k_0 > 0, \bar{f}_2 = \frac{f_2}{N}, \bar{g}_2 = \frac{g_2}{N}$. 由假设 1 中的不等式可以得到:

$$\begin{aligned} |\bar{f}_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_i(t-d(t)))| &\leq a_1 \left(\sum_{k=1}^i |x_k(t)| + \sum_{k=1}^i |x_k(t-d(t))| \right), \\ |\bar{g}_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_i(t-d(t)))| &\leq a_2 \left(\sum_{k=1}^i |x_k(t)| + \sum_{k=1}^i |x_k(t-d(t))| \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

2.1 状态反馈控制器设计

第一步: 定义误差变量 $\xi_1 = x_1$ 和 Lyapunov 函数 $U_1(\xi_1) = \frac{1}{4} k_1 \xi_1^4 (k_1 > 0)$, 由定义 1, 假设 1 和引理 3 得,

$$\begin{aligned}
LU_1(\xi_1) &\leq k_1 \xi_1^3 (Nx_2 + f_1) + \frac{3}{2} k_1 \xi_1^2 g_1^2 \leq \\
&Nk_1 \xi_1^3 x_2 + a_1 k_1 \xi_1^3 (|\xi_1| + |\xi_1(t-d(t))|) + 3a_2^2 k_1 \xi_1^2 (|\xi_1|^2 + |\xi_1(t-d(t))|^2) \leq \\
&N(k_1 \xi_1^3 x_2 + (a_1 k_1 + 3a_2^2 k_1 + l_{11} + l_{12}) \xi_1^4 + (\bar{l}_{11} + \bar{l}_{12}) \xi_1^4 (t-d(t))) , \\
\text{其中 } \bar{l}_{11} &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4l_{11}} \right)^3 (a_1 k_1)^4 \quad \bar{l}_{12} = \frac{1}{4l_{12}} (3a_2^2 k_1)^2 \quad l_{11} \quad l_{12} > 0. \text{ 显然, 可选取虚拟控制器} \\
x_2^* &= - \left(\frac{c_{11} + l_{11} + l_{12}}{k_1} + a_1 + 3a_2^2 \right) \xi_1(t) = -\alpha_1 \xi_1(t) , \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } c_{11} > 0 \quad \alpha_1 &= \frac{c_{11} + l_{11} + l_{12}}{k_1} + a_1 + 3a_2^2, \text{ 则有} \\
LU_1(\xi_1) &\leq N(k_1 \xi_1^3 (x_2 - x_2^*) + k_1 \xi_1^3 x_2^* + (a_1 k_1 + 3a_2^2 k_1 + l_{11} + l_{12}) \xi_1^4 + (\bar{l}_{11} + \bar{l}_{12}) \xi_1^4 (t-d(t))) \leq \\
&N(-c_{11} \xi_1^4 + k_1 \xi_1^3 (x_2 - x_2^*) + \gamma_{11} \xi_1^4 (t-d(t))) , \quad (6) \\
\text{其中: } \gamma_{11} &= \bar{l}_{11} + \bar{l}_{12}.
\end{aligned}$$

第二步: 定义误差变量 $\xi_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + \alpha_1 \xi_1$, 由式(1)和 ξ_2 的定义, 得

$$d\xi_2 = N(k_0 u + \alpha_1 x_2) dt + (\bar{f}_2 + \alpha_1 f_1) dt + (\bar{g}_2^T + \alpha_1 \bar{g}_1^T) d\omega. \quad (7)$$

选取 Lyapunov 函数 $U_2(\xi_1, \xi_2) = U_1(\xi_1) + \frac{1}{4} k_2 \xi_2^4$ ($k_2 > 0$), 由式(6)和(7)可得

$$\begin{aligned}
LU_2(\xi_1, \xi_2) &\leq N(-c_{11} \xi_1^4 + k_1 \xi_1^3 (x_2 - x_2^*) + \gamma_{11} \xi_1^4 (t-d(t)) + Nk_0 k_2 \xi_2^3 u + Nk_2 \alpha_1 \xi_2^3 x_2 + \\
&k_2 \xi_2^3 (\bar{f}_2 + \alpha_1 f_1) + \frac{3}{2} k_2 \xi_2^2 (\bar{g}_2^T + \alpha_1 \bar{g}_1^T)^2). \quad (8)
\end{aligned}$$

利用假设1, ξ_2 的定义和引理3, 得

$$Nk_1 \xi_1^3 |x_2 - x_2^*| = Nk_1 \xi_1^3 |\xi_2| \leq N(b_{21} \xi_1^4 + \rho_{21} \xi_2^4), \quad (9)$$

$$Nk_2 \alpha_1 \xi_2^3 x_2 = Nk_2 \alpha_1 \xi_2^3 (\xi_2 - \alpha_1 \xi_1) \leq N(b_{22} \xi_1^4 + \rho_{22} \xi_2^4), \quad (10)$$

$$Nk_2 \xi_2^3 (\bar{f}_2 + \alpha_1 f_1) \leq N(b_{23} \xi_1^4 + \rho_{23} \xi_2^4 + b_{11} \xi_1^4 (t-d(t)) + d_{23} \xi_2^4 (t-d(t))), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
N \cdot \frac{3}{2} k_2 \xi_2^2 (\bar{g}_2^T + \alpha_1 \bar{g}_1^T)^2 &\leq N \cdot \frac{3}{2} k_2 \xi_2^2 \cdot 2(\bar{g}_2^2 + \alpha_1^2 \bar{g}_1^2) \leq \\
&N(b_{24} \xi_1^4 + \rho_{24} \xi_2^4 + b_{21} \xi_1^4 (t-d(t)) + d_{24} \xi_2^4 (t-d(t))). \quad (12)
\end{aligned}$$

将式(9)~(12)代入不等式(8), 可得

$$LU_2(\xi_1, \xi_2) \leq N(-c_{21} \xi_1^4 + \rho_2 \xi_2^4 + q_{21} \xi_1^4 (t-d(t)) + q_{22} \xi_2^4 (t-d(t)) + Nk_0 k_2 \xi_2^3 u), \quad (13)$$

其中: $c_{21} = c_{11} - \sum_{i=1}^4 b_{2i} > 0$ $\rho_2 = \sum_{i=1}^4 \rho_{2i} > 0$ $q_{21} = \sum_{i=1}^2 b_{2i} + \gamma_{11} > 0$ $q_{22} = \sum_{i=3}^4 d_{2i} > 0$. 选取虚拟控制器

$$x_3^* = - \left(\frac{c_{22} + \rho_2}{k_0 k_2} \right) \xi_2 = -\alpha_2 \xi_2, \quad (14)$$

其中: $\alpha_2 = \frac{c_{22} + \rho_2}{k_0 k_2} > 0$. 将式(14)代入式(13), 得

$$\begin{aligned}
LU_2(\xi_1, \xi_2) &\leq N(-(c_{21} \xi_1^4 + c_{22} \xi_2^4) + q_{21} \xi_1^4 (t-d(t)) + q_{22} \xi_2^4 (t-d(t)) + k_0 k_2 \xi_2^3 (u - x_3^*)). \\
&\quad (15)
\end{aligned}$$

注: 在 Lyapunov 函数 $U_1(\xi_1)$ 和 $U_2(\xi_1, \xi_2)$ 的选择中, 分别引入参数 k_1 和 k_2 , 使得设计更加灵活, 并通过选取适当的 k_1 和 k_2 , 使函数 $L(x_1)$ 的增益不至于过大.

2.2 观测器设计

与文献[13]所设计的观测器类似, 本文设计如下观测器:

$$dz = N(k_0 u - \frac{dL(x_1)}{dx_1} (z + L(x_1))) - \frac{dL(x_1)}{dx_1} f_1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 L(x_1)}{dx_1^2} |g_1^T|^2 dt - \frac{dL(x_1)}{dx_1} g_1^T d\omega, \quad (16)$$

其中: $L(x_1)$ 是满足 $\frac{dL(x_1)}{dx_1} \geq 0$ 的光滑待定参数.

令 $e = x_2 - L(x_1) - z$, 由于

$$dL(x_1) = \left(N \frac{dL(x_1)}{dx_1} x_2 + \frac{dL(x_1)}{dx_1} f_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 L(x_1)}{dx_1^2} |g_1^T|^2 \right) dt + \frac{dL(x_1)}{dx_1} g_1^T d\omega, \quad (17)$$

则由式(1)、(16)和(17)可得

$$de = (\bar{f}_2 + N \frac{dL(x_1)}{dx_1} (z + L(x_1) - x_2)) dt + \bar{g}_2^T d\omega.$$

选取 Lyapunov 函数 $W(e) = \frac{e^4}{4}$, 则

$$LW(e) = e^3 (\bar{f}_2 + N \frac{dL(x_1)}{dx_1} (z + L(x_1) - x_2)) + \frac{3}{2} e^2 |\bar{g}_2^T|^2. \quad (18)$$

由引理3, e 的定义和 $\frac{dL(x_1)}{dx_1} \geq 0$, 可得

$$e^3 \bar{f}_2 \leq N(m_{31} \xi_1^4 + m_{32} \xi_2^4 + \gamma_{31}(\xi_1^4(t-d(t)) + \xi_2^4(t-d(t))) + \gamma_{32} e^4), \quad (19)$$

$$e^3 N \frac{dL(x_1)}{dx_1} (z + L(x_1) - x_2) = -N \frac{dL(x_1)}{dx_1} e^4, \quad (20)$$

$$\frac{3}{2} e^2 |\bar{g}_2^T|^2 \leq N(m_{41} \xi_1^4 + m_{42} \xi_2^4 + \gamma_{41}(\xi_1^4(t-d(t)) + \xi_2^4(t-d(t))) + \gamma_{42} e^4). \quad (21)$$

将式(19)~(21)代入式(18)得:

$$LW(e) \leq N(c_{111} \xi_1^4 + c_{112} \xi_2^4 + c_{113}(\xi_1^4(t-d(t)) + \xi_2^4(t-d(t))) - (\frac{dL(x_1)}{dx_1} - \gamma_{32} - \gamma_{42}) e^4), \quad (22)$$

其中: $c_{111} = \sum_{i=3}^4 m_{i1} > 0$, $c_{112} = \sum_{i=3}^4 m_{i2} > 0$, $c_{113} = \sum_{i=3}^4 \gamma_{i1} > 0$.

2.3 构造增益函数—— $L(x_1)$

由于 x_2 不可测, 将虚拟控制器 x_3^* 中的 x_2 用 $z + L(x_1)$ 替换, 得到控制器

$$u(t) = -\alpha_2(z + L(x_1) + \alpha_1 x_1), \quad (23)$$

因此, 系统(1)的控制器为

$$v(t) = -k_0 N^2 \alpha_2 (z + L(x_1) + \alpha_1 x_1). \quad (24)$$

将式(14)和(23)代入式(15)中, 由引理3得:

$$LU_2(\xi_1, \xi_2) \leq N(- (c_{21} \xi_1^4 + c_{22} \xi_2^4) + q_{21} \xi_1^4(t-d(t)) + q_{22} \xi_2^4(t-d(t)) + k_0 k_2 \xi_2^3 \alpha_2 e) \leq N(-c_{21} \xi_1^4 - c_{52} \xi_2^4 + q_{21} \xi_1^4(t-d(t)) + q_{22} \xi_2^4(t-d(t)) + c_{53} e^4), \quad (25)$$

其中: $c_{52} > 0$, $c_{53} > 0$. 取 Lyapunov 函数 $V(\xi_1, \xi_2, e) = U_2(\xi_1, \xi_2) + W(e) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 k_i \xi_i^4 + \frac{1}{4} e^4$, 由式(22)

和(25)可得:

$$LV(\xi_1, \xi_2, e) \leq N(-c_{61} \xi_1^4 - c_{62} \xi_2^4 + c_{63} \xi_1^4(t-d(t)) + c_{64} \xi_2^4(t-d(t)) + (c_{53} - \frac{dL(x_1)}{dx_1} + \gamma_{32} + \gamma_{42}) e^4), \quad (26)$$

其中: $c_{61} = c_{21} - c_{111} > 0$, $c_{62} = c_{52} - c_{112} > 0$, $c_{63} = q_{21} + c_{113} > 0$, $c_{64} = q_{22} + c_{113} > 0$.

取 $\frac{dL(x_1)}{dx_1} = c_{65} + c_{53} + \gamma_{32} + \gamma_{42}$, $c_{65} > \frac{1}{4}$, 代入式(26)得

$$LV(\xi_1 \ \xi_2 \ \rho) \leq N(-\sum_{i=1}^2 c_{6i} \xi_i^4 - c_{65} e^4 + \sum_{i=3}^4 c_{6i} \xi_i^4(t-d(t))). \quad (27)$$

当

$$V(\xi(t-d(t))) \leq V(\xi(t-d(t)) \ \rho(t-d(t))) < qV(\xi(t) \ \rho(t)), \quad (28)$$

即 $\sum_{i=3}^4 c_{6i} \xi_i^4(t-d(t)) < q(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 k_i \xi_i^4 + \frac{1}{4} e^4)$ 时, 有

$$LV(\xi_1 \ \xi_2 \ \rho) \leq N(-\sum_{i=1}^2 (c_{6i} - \frac{q}{4} k_i) \xi_i^4 - (c_{65} - \frac{q}{4}) e^4) = -\mu V(\xi_1 \ \xi_2 \ \rho), \quad (29)$$

则必存在 $q > 1$, 使 $\mu > 0$ 成立.

综上所述, 本文主要结果如下:

定理1 在假设1成立的条件下, 设计输出反馈控制器(3)、(16)和(23), 可使得系统(1)在 $[-d, \infty)$ 上几乎处处存在唯一解, 且 $x = 0$ 是依概率全局渐近稳定的.

证明 由式(23)可知 $\frac{du}{dx_i}$ ($i = 1, 2$) 是连续的, 故闭环系统(1)和(23)满足局部 Lipschitz 条件, 且 f_i, g_i 满足局部 Lipschitz 条件, 因此系统(1)在 $[-d, \infty)$ 上几乎处处存在唯一解. 由 U_2 的表达式、式(28)和(29)可知, 引理1条件已满足, 故系统(7)的平衡点 $\xi = 0$ 依概率全局渐近稳定. 又由 ξ_1, ξ_2 的定义得, $x = 0$ 也是依概率全局渐近稳定的. 证毕.

3 仿真实例

本节给出以下实例来验证设计方法的有效性. 考虑如下系统:

$$\begin{cases} d\eta_1(t) = \eta_2 dt + \frac{1}{5} \eta_1(t-d(t)) \sin \eta_1 \sin(\eta_1(t-d(t))) dt + \frac{1}{10} (\eta_1 \cos \eta_1 + \eta_1(t-d(t))) d\omega, \\ d\eta_2(t) = v dt + \frac{1}{5} \eta_1(t-d(t)) \sin(\eta_1(t-d(t))) \sin \eta_2 dt + \frac{1}{20} (\eta_1 \cos \eta_2 + 2\eta_1 \sin \eta_1 \sin(\eta_2(t-d(t)))) d\omega, \\ y(t) = \eta_1(t). \end{cases} \quad (30)$$

系统中取 $d(t) = \frac{1}{4}(1 + \sin t)$, 根据引理3, 易得

$$\begin{aligned} |f_1| &\leq \frac{1}{8} (|\eta_1(t)| + |\eta_1(t-d(t))|), \quad |g_1| \leq \frac{1}{10} (|\eta_1(t)| + |\eta_1(t-d(t))|), \\ |f_2| &\leq \frac{1}{8} (|\eta_2(t)| + |\eta_1(t-d(t))|), \quad |g_2| \leq \frac{1}{10} (|\eta_1(t)| + |\eta_1(t-d(t))|), \end{aligned}$$

其中: $a_1 = 0.125, \mu_2 = 0.1$. 显然系统(30)满足假设1.

引入一组坐标变换: $\eta_1(t) = x_1(t), \eta_2(t) = Nx_2(t), v(t) = k_0 N^2 u(t)$, 则有

$$\begin{cases} dx_1(t) = Nx_2 dt + \frac{1}{5} x_1(t-d(t)) \sin x_1 \sin(x_1(t-d(t))) dt + \frac{1}{10} (x_1 \cos x_1 + x_1(t-d(t))) d\omega, \\ dx_2(t) = Nk_0 u(t) dt + \frac{1}{5N} x_1(t-d(t)) \sin(x_1(t-d(t))) \sin x_2 dt + \\ \quad \frac{1}{20N} (x_1 \cos x_2 + 2x_1 \sin x_1 \sin(x_2(t-d(t)))) d\omega, \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (31)$$

根据前面的设计过程, 可得

$$dz = N(k_0 u - 150(z + 150x_1) - 300x_1(t-d(t)) \sin x_1 \sin(x_1(t-d(t)))) dt -$$

$$15(x_1 \cos x_1 + x_1(t - d(t))) d\omega.$$

取 $\alpha_1 = 1.32$, $\alpha_2 = 2.07$, 以及 $k_0 = \frac{1}{30} L(x_1) = 150x_1$, $N = 100$, 则控制器为 $u(t) = -2.07(z + 151.32x_1)$.

仿真过程中, 取初值 $\eta_1(0) = 0.1$, $\eta_2(0) = -1.4$, $z(0) = 0.107$. 通过 Matlab 软件进行仿真, 最终可得图 1~3 所示的状态响应曲线、观测器响应曲线和控制器响应曲线, 仿真结果验证了设计方案的有效性.

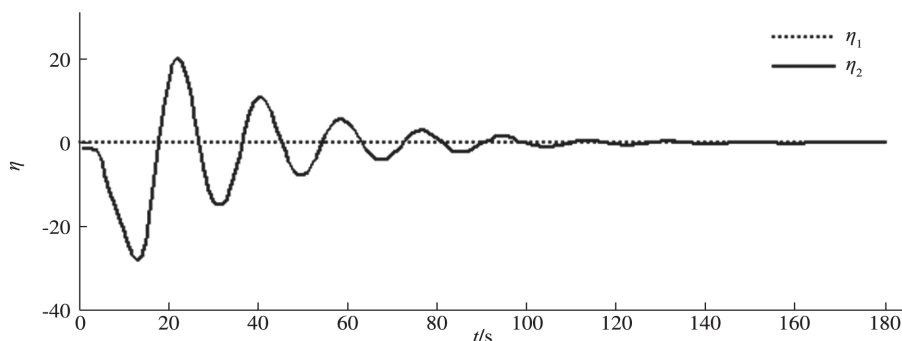


图1 系统状态响应曲线

Fig. 1 The response of system states

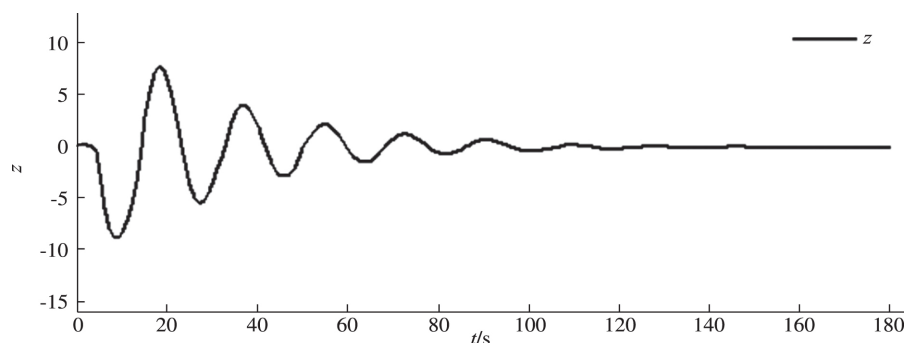


图2 观测器状态响应曲线

Fig. 2 The response of observer state

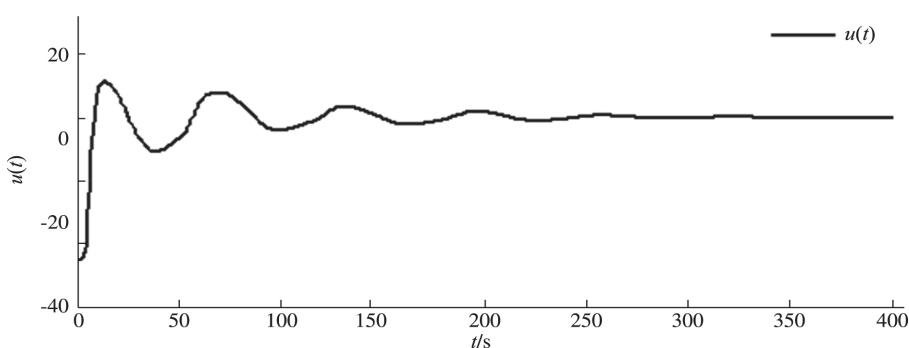


图3 控制器响应曲线

Fig. 3 The response of control input

4 结语

本文利用 Razumikhin 方法, 解决了随机时变时滞非线性系统的输出反馈镇定问题, 通过选取适当的观测器和 Lyapunov 函数, 结合 Backstepping 设计技术, 最终使得闭环系统的平衡点依概率全局渐近稳定. 如何将本文的设计方法推广至高阶系统, 以及如何弱化假设 1 的条件使其推广到更一般的随机系统

中,是今后的研究工作.

参考文献:

- [1] HALES J K ,LUNEL S M V. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer ,1993: 126 – 140.
- [2] GU K ,KHARITONOV V L ,CHEN J. Stability of time-delay systems [M]. Boston: Birkhauser 2003: 82 – 124.
- [3] ARNOLD L. Stochastic differential equations: theory and applications [M]. NewYork: Wiley ,1972: 91 – 130.
- [4] CHEN W S ,JIAO L C ,LI J. Adaptive NN backstepping output-feedback control for stochastic nonlinear strict-feedback systems with time-varying delays [J]. IEEE Transactions on Systems ,Man and Cybernetics Society 2010 40(3) : 939 – 950.
- [5] LIU S J ,GE S Z ,ZHANG J F. Adaptive output-feedback control for a class of stochastic nonlinear systems with time-varying delays [J]. International Journal of Control 2008 81(8) : 1210 – 1220.
- [6] MICHIELS W ,NICULESCU S L. Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalued-based approach [M]. Philadelphia: SIAM 2007.
- [7] BOUKAS E K ,LIU Z K. Deterministic and stochastic time delay systems [M]. Boston: Birkhauser 2002.
- [8] DENG H ,KRSTIC M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control , 1999 44(2) : 328 – 333.
- [9] DENG H ,KRSTIC M. Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. Systems and Control Letters 2000 39(1) : 173 – 182.
- [10] KRSTIC M ,DENG H. Stabilization of uncertain nonlinear systems [M]. NewYork: Springer ,1998.
- [11] WU Z J ,XIE X J ,ZHANG S Y. Stochastic adaptive back-stepping controller design by introducing dynamic signal and changing supply function [J]. International Journal of Control 2006 79(12) : 1635 – 1646.
- [12] WU Z J ,XIE X J ,ZHANG S Y. Adaptive back-stepping controller design using stochastic small-gain theorem [J]. Automatica 2007 43(4) : 608 – 620.
- [13] 李武全 ,井元伟 ,张嗣瀛. 一类高阶次随机非线性系统的输出反馈镇定 [J]. 控制与决策 2010 25(1) : 126 – 129.
- [14] 雒晓霞 ,王天成. 高阶随机时变时滞非线性系统的输出反馈 [J]. 鲁东大学学报(自然科学版) ,2016 32(3) : 211 – 217.
- [15] LIU L ,XIE X J. Output-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay [J]. Automatica 2011 47(12) : 2772 – 2779.
- [16] 王天成 ,李刚. 基于 Razumikhin 方法的随机时变时滞非线性系统的状态反馈 [J]. 控制与决策 2015 30(8) : 1519 – 1522.
- [17] 李刚. 一类随机时滞非线性系统的状态反馈 [D]. 烟台: 鲁东大学 2015.

Razumikhin-type Approach on Output Feedback Control of Second-order Stochastic Nonlinear Systems with Time-varying Delay

WANG Yan , WANG Tiancheng

(School of Mathematics and Statistic Science ,Ludong University ,Yantai 264039 ,China)

Abstract: The problem of output feedback stabilization for a class of second-order stochastic nonlinear systems with time-varying delay is studied in this paper. Based on the Razumikhin-type approach and the backstepping design method ,an output feedback controller was constructed by designing an effective observer and choosing suitable Lyapunov functions. It ensures that the equilibrium point of closed-loop system is globally asymptotically stable in probability. The limitations on the derivative of delay can be completely removed ,which is the common assumption of stochastic nonlinear systems with time-varying delay. By using a simulation example ,the efficiency of the designing scheme was demonstrated.

Keywords: time-varying delay; stochastic nonlinear systems; Razumikhin theorem; output feedback; stabilization (责任编辑 顾建忠)